Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Les parties **I** et **II** sont indépendants.

Partie : I Pour tous x et y éléments de $G =]1,2[$, on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G.

2) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif

et on considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans G tel que : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

a) Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(G,*)$.

b) Montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie : II On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $M(x,y) = xI + yA$.

On considère l'ensemble $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) a) Vérifier que $A^3 = 0$, en déduire que A est un diviseur de zéro dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

b) Vérifier que $(A^2 - A + I)(A + I) = I$

En déduire que la matrice $(A+I)$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$ qu'on déterminera.

2) Démontrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel et donner une base de cet espace.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Partie I : Soit a un nombre complexe différent de 1.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

1) Montrer que $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ sont les solutions de l'équation (E).

2) On pose : $a = e^{i\theta}$ tel que $0 < a < \pi$

a) Montrer que $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

b) En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2.

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On suppose que $\mathrm{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

1) Déterminer les affixes de chacun des points J et K milieux respectifs des segment $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a.

2) Soit R_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose : $C' = R_1(C)$ et $A' = R_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'.

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$.

3) Calculer $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher :
Trois Boules rouges et quatre boules noires.

Partie :I

On tire au hasard quatre boules de l'urne successivement et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires dans un tirage .

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2) Déterminer E(X) l'espérance mathématique de la variable X.

Partie :II

On effectue l'expérience suivante en trois étapes :

Première étape : On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et la rend dans l'urne.
Deuxième étape : On ajoute dans l'urne cinq boules de même couleur que la boule tirée dans la première étape.
Troisième étape : On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne qui contient maintenant 12 boules.

On considère les événements suivants :

N : « la boule tirée dans la première étape est Noire »
R : « la boule tirée dans la première étape est rouge »
E : « toutes les boules tirées dans la troisième étape sont noires »

1) Montrer que $p(E\cap N)=\frac{12}{55}$.
2) Calculer $p(E)$.
3) Calculer la probabilité de l'événement **E** sachant que l'événement **R** est réalisé

Bon Courage

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre.

1) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"*"$ par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$; $x*y=x+y-2$
   a) Montrer que la loi $"*"$ est commutative et associative.
   b) Montrer que la loi $"*"$ admet un élément neutre qu'on déterminera.
   c) Montrer que la loi $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.
2) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"T"$ par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$; $xTy=xy-2x-2y+6$
   et on considère l'application f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall x\in\mathbb{Z}$; $f(x)=x+2$
   a) Montrer que l'application f est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$.
   b) Montrer que : $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$; $(x+y)Tz=(xTz)+(yTz)$.
3) En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif unitaire.
4) a) Montrer que : $xTy=2 \iff (x=2 \text{ ou } x=3)$.
   b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre.
   c) l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? justifier la réponse.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Partie I : Soit a un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\quad 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$$

1) Vérifier que $\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$ est le discriminant de l'équation (E)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A , B et M d'affixes respectifs a , $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ et z .

Soit R la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $A_1=R^{-1}(A)$ et $A_1=R^{-1}(A)$

soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1 .

3) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

4) a) Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $a_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme..

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Le but de cet exercice est de chercher s'il existe des entiers naturels n supérieurs strictement à 1 vérifiant la relation $(\Re)$ suivante : $(\Re): 3^n-2^n\equiv 0[n]$.

1) On suppose que l'entier n vérifie la relation $(\Re)$. Soit p le plus petit diviseur premier positif du nombre n .

a) Montrer que $3^n-2^n\equiv 0[p]$, en déduire que $p\geq 5$.

b) Montrer que $2^{p-1}\equiv 1[p]$ et $3^{p-1}\equiv 1[p]$.

c) Montrer qu'il existe un couple (a,b) un couple de Z^2 tel que $an-b(p-1)=1$ tel $k\in IN^*$

d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $(p-1)$.
(signifie que : $a=q(p-1)+r$ avec $q\in Z$ et $0\leq r<p-1$)
Montrer qu'il existe un entier non nul k tel que : $rn=1+k(p-1)$

2) Déduire de tout ce qui précède, qu'il n'existe aucun entier naturel n supérieur strictement à 1 vérifiant la relation $(\Re)$.

Bon Courage

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les parties I et II sont indépendants.

Partie : I Pour tous a et b éléments de $I=[1,+\infty[$, on pose : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)^2$

1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans I .

2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative dans I .

3) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre dans I qu'on déterminera.

Partie : II On rappelle que $(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I .

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}/x\in IR\right\}$

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(IR),\times)$.

2) On considère l'application φ définie de IR^* dans E par : $\forall x\in IR^*$; $\varphi(x)=M(x)$

a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(IR^*,\times)$ dans $(E,\times)$.

b) En déduire la structure de $(E,\times)$.

c) On pose $H=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}/n\in Z\right\}$, Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(E,\times)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les deux parties I et II sont indépendantes.
le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \; z^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

1) Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

2) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$

Partie II : On considère trois points deux à deux distincts A, B et Ω d'affixes respectifs a, b et ω.

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $P = R(A)$ et $B = R(Q)$

soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

3) a) Montrer que : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$.

b) Montrer que : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

c) Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b} = \left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

4) On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Montrer que est un $APQR$ parallélogramme.

b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, en déduire que $APQR$ est un rectangle.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

1) a) Vérifier que : 503 est entier premier.

b) Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$, en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E):\; 49x - 6y = 1$.

sachant que le couple $(1;8)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) avec la mise évidence des étapes de la résolution.

3) On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2007}$.

a) Montrer que le couple $(7^{2006}; N)$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire que N est divisible par 2012.

c) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

Bon Courage

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Partie : I On rappelle que $(M_3(IR), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer : $I-A$ et A^2.

2) En déduire que la matrice A admet un inverse dans $(M_3(IR),+)$ qu'on déterminera.

Partie : II Pour tous a et b éléments de $I=\left]1,+\infty\right[$, on pose : $a*b=\left(\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}\right)^2$

1) Vérifier que : $\left(\forall(x,y)\in IR^2\right)$; $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$.

2) Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne dans I.

3) On rappelle que $(IR_+^*,\times)$ est un groupe commutatif.

3) On considère l'application φ définie de IR_+^* dans I par : $\forall x\in IR_+^*$; $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$

a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(IR_+^*,\times)$ dans $(I,*)$.

b) En déduire la structure de $(I,*)$.

4) On pose $H=\left\{\sqrt{1+2^m}/m\in Z\right\}$, Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$, où a est un complexe non nul.

1) Déterminer z_1 et z_2 solutions de l'équation (E).

2) a) vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

b) Montrer que : (z_1z_2 est un réel) $\Longleftrightarrow$ $\arg(a)=\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Partie II : Soit c un nombre complexe non nul et c un nombre complexe non nul.

3) On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs : 1, $(1+i)$, c, ic et z.

a) Montrer que : (A, D et M sont alignés) $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$

b) Montrer que : $(AD)\perp(OM)$ $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

4) Soit h l'affixe du point H la projection orthogonale du point O sur la droite (AD)

a) Montrer que : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

b) En déduire que : $(BH)\perp(CH)$

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

On considère dans Z^2 l'équation : $(E):\ 143x-195y=52$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 143 et 195, en déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans Z^2.

b) Sachant que le couple $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E), Déterminer la solution générale de l'équation (E) dans Z^2.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5 , montrer que $(\forall k\in IN)$; $n^{4k}\equiv 1[5]$.

3) Soient x et y deux nombres entiers non nuls tels que $x\equiv y[4]$.

a) Montrer que : $(\forall k\in IN^*)$; $n^x\equiv n^y\ [5]$

b) En déduire que : $(\forall k\in IN^*)$; $n^x\equiv n^y\ [10]$

4) Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux entiers naturels non nuls tels que le couple $(\mathbf{x};\mathbf{y})$ soit solution de l'équation $(\mathbf{E})$.

Montrer que quel que soit $\mathbf{n}$ de $\mathbb{N}^*$: les nombres $\mathbf{n}^{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{n}^{\mathbf{y}}$ ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal.

Bon Courage

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Pour tout éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de l'intervalle $\mathbf{I}=\left]0,1\right[$, on pose : $\mathbf{x}*\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{xy}}{\mathbf{xy}+(1-\mathbf{x})(1-\mathbf{y})}$

1) a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{I}$.
b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbf{I}$.
c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans $\mathbf{I}$ qu'on déterminera.
d) Montrer que $(\mathbf{I},*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère les deux ensembles : $\mathbf{H}=\left\{2^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $\mathbf{K}=\left\{\dfrac{1}{2^{\mathbf{n}}+1}/\mathbf{n}\in\mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

b) On considère l'application φ définie de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{I}$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x})==\dfrac{1}{\mathbf{x}+1}$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbf{H},\times)$ vers $(\mathbf{I},*)$.
En déduire que $(\mathbf{K},*)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{I},*)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathbf{E}):\ \mathbf{z}^3-(1+2\mathbf{i})\mathbf{z}^2+3(1+\mathbf{i})\mathbf{z}-10(1+\mathbf{i})=0$

1) Montrer que le nombre $-2\mathbf{i}$ est une solution de l'équation $(\mathbf{E})$

2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :
$(\forall \mathbf{z}\in\mathbb{C}):\quad \mathbf{z}^3-(1+2\mathbf{i})\mathbf{z}^2+3(1+\mathbf{i})\mathbf{z}-10(1+\mathbf{i})=(\mathbf{z}+2\mathbf{i})(\mathbf{z}^2+\alpha\mathbf{z}+\beta)$
a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(5-12\mathbf{i})$
b) Résoudre dans l'équation $(\mathbf{E})$.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathbf{O},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\right)$
On considère les points deux à deux $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}=-1+3\mathbf{i}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}$ et $\mathbf{c}=2+\mathbf{i}$.

1) Montrer que $\mathbf{ABC}$ est un triangle rectangle et isocèle de sommet $\mathbf{C}$.

2) Soit $\mathbf{R}_1$ la rotation de centre $\mathbf{B}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et $\mathbf{R}_2$ la rotation de centre $\mathbf{A}$ et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$.

Soit $\mathbf{M}$ un point du plan d'affixe $\mathbf{z}$ On pose : $\mathbf{M}_1=\mathbf{R}_1(\mathbf{M})$ et $\mathbf{M}_2=\mathbf{R}_2(\mathbf{M})$.

a) Vérifier que l'expression analytique de la rotation $\mathbf{R}_1$ est : $\mathbf{z}_1=\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{z}-\sqrt{3}-\mathbf{i}$.

b) Déterminer $\mathbf{z}_2$ affixe de $\mathbf{M}_1$ en fonction de $\mathbf{z}$.

c) En déduire que $\mathbf{I}$, milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe.

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Soit $\mathbf{x}$ un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2[19]$.

1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$

b) Montrer que $10^{18} \equiv 1[19]$

2) Soit $\mathbf{d}$ un diviseur commun de $(x+1)$ et 18

a) Montrer que $10^d \equiv 1[19]$.

b) Montrer que $d = 18$.

c) En déduire que : $x \equiv 17[18]$

Bon Courage

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Les parties $\mathbf{I}$ et $\mathbf{II}$ sont indépendants.

Partie : I On rappelle que $(M_3(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose : $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, en général $A^{n+1} = A^n \times A$.

1) Montrer que : $\forall k \in IN \quad ; \quad A^{2k} = I$

2) Montrer que la matrice A admet un inverse A^{-1} qu'on déterminera.

Partie : II Soit α un nombre réel strictement positif.

1) Pour tout x et y de l'intervalle $I =]\alpha,+\infty[$, on pose : $x * y = (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{I}$.

b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbf{I}$.

c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans $\mathbf{I}$ qu'on déterminera.

d) Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application φ définie de $\mathbf{I}$ dans IR_+^* par : $\forall x \in I \; ; \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x-\alpha}$

a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(I,*)$ dans $(IR_+^*,\times)$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbf{I}$ l'équation $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$ avec $x^{(3)} = x * x * x$

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Les deux parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Soit $\mathbf{m}$ un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_m) : \; z^2 + [(1-i)m-4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

1) Vérifier que $z_1 = 2 - m$ est une solution de l'équation (E_m).

2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m).

a) Montrer que : $(z_1z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1-i) - 3 = 0)$

b) Déterminer la valeur de $\mathbf{m}$ tel que $z_1z_2 = 1$

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
On considère l'application δ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -z + 2$.

Soit la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et z'' l'affixe du point M'' image du point M par la rotation R.

1) a) Montrer que l'application δ est la symétrie centrale de centre le point K d'affixe 1.
   b) Montrer que $z'' = iz + 2$.
2) On suppose que le point M est distinct du point O, origine du repère et soit A le point d'affixe 2.
   a) Calculer $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$
   b) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points A, Ω, M' et M'' soient cocycliques.

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Soit N le nombre entier dont l'écriture dans le système de numération décimal est : $N = \underbrace{11\cdots1}_{2010 \text{ fois le chiffre } 1}$.

1) Montrer que N est divisible par 11.
2) a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que: $10^{2010} - 1 = 9N$
   b) Démontrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.
   c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N.
3) Démontrer que le nombre N est divisible par le nombre 22121.

Bon Courage

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose pour tout x réel, $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(x) = M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.
   b) Montrer que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
   c) Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de $M(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5 X = B$ avec $A = M(2)$ et $B = M(12)$
4) Soit l'ensemble $F = \{M(\ln x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$. Montrer que est un sous-groupe de $(E, \times)$.

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$
   a) Vérifier que le nombre $a = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$ est une solution de l'équation (E).
   b) En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).
2) a) Montrer que $a^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$. b) Ecrire a sous forme trigonométrique.
3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Soit le cercle (Γ) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω, centre du cercle (Γ).

b) Montrer que O et C sont deux points du cercle (Γ).

c) Montrer que le complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher :
Deux boules rouges et dix boules blanches.
On tire au hasard les boules de l'urne l'une après l'autre sans remise jusqu'au tirage de la première boule blanche et on arrête le tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées .

3) a) déterminer les valeurs de la variable X.

b) Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

c) Montrer que : $p[X=2]=\frac{5}{33}$

d) Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

4) a) Montrer que $E(X)=\frac{13}{11}$. ($E(X)$ est l'espérance mathématique de la variable X).

b) Calculer $E(X^2)$ en déduire $V(X)$ ($V(X)$ est la variance de la variable X).

Bon Courage

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

Les parties I et II sont indépendants.

Partie : I l'ensemble $I=]0,+\infty[$ est muni de la loi $*$ telle que : $(\forall(a,b)\in I^2)$; $a*b=e^{\ln(a)\ln(b)}$

1) Montrer que $*$ est commutative et associative dans I.

2) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans I, qu'on déterminera.

3) a) Montrer que $(I-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $J=]1,+\infty[$ est un sous-groupe du groupe $(I-\{1\},*)$.

4) l'ensemble $I=]0,+\infty[$ est muni de la loi $\times$. ($\times$ est le produit des nombres sur IR)

a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.

b) Montrer que la loi $*$ est un corps commutatif.

Partie : II On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3.

2) En déduire que la matrice A n'a pas de matrice inverse.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Déterminer les racines carrées du complexe $3+4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ 4z^2-10iz-7-i=0$

2) Soient a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que $Re(a)=0$ et soient les deux points A et B d'affixes respectifs a et b.

a) Vérifier que : $\frac{b}{a}=1-i$

b) En déduire que le triangle AOB est isocèle rectangle en A .

3) Soit $\mathbf{C}$ un point d'affixe $\mathbf{c}$ différent de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ l'image du point $\mathbf{B}$ par la rotation de centre $\mathbf{C}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soit $\mathbf{K}$ l'image du point $\mathbf{D}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AO}}$.

a) Déterminer $\mathbf{c}$ en fonction du nombre complexe $\mathbf{d}$ affixe du point A.

b) Déterminer en fonction de $\mathbf{c}$ le nombre complexe $\mathbf{k}$ affixe du point $\mathbf{K}$.

c) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\frac{\mathbf{k}-\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{c}}$, en déduire la nature du triangle $\mathbf{ACK}$.

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

1) Déterminer les nombres entiers naturels $\mathbf{m}$ tels que : $\mathbf{m^2+1\equiv 0[5]}$.

2) Soit $\mathbf{p}$ un entier naturel premier tel que : $\mathbf{p=3+4k}$ avec $\mathbf{k\in \mathbb{N}}$

et soit $\mathbf{n}$ un entier naturel tel que $\mathbf{n^2+1\equiv 0[p]}$

a) Vérifier que $\mathbf{(n^2)^{2k+1}\equiv -1[p]}$.

b) Montrer que $\mathbf{n}$ et $\mathbf{p}$ sont premiers entre eux.

c) En déduire que $\mathbf{(n^2)^{2k+1}\equiv 1[p]}$

3) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel $\mathbf{n}$ vérifiant la relation $\mathbf{n^2+1\equiv 0[p]}$.

Bon Courage

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

On rappelle que $(\mathbf{M_2(\mathbb{R}),+,\times})$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$, et que $(\mathbf{M_2(\mathbb{R}),+,.})$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $\mathbf{M(a,b)}=\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{4b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $\mathbf{V}=\{\mathbf{M(a,b)/(a,b)\in \mathbb{R}^2}\}$.

1) Montrer que $\mathbf{V}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{M_2(\mathbb{R}),+,.})$ et déterminer une base de $\mathbf{V}$.

2) a) Montrer que $\mathbf{V}$ est une partie stable de $(\mathbf{M_2(\mathbb{R}),\times})$

b) Montrer que $(\mathbf{V,+,\times})$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Calculer $\mathbf{M(\frac{1}{2},\frac{-1}{4})\times M(\frac{1}{2},\frac{1}{4})}$

b) l'anneau $(\mathbf{V,+,\times})$ est-il un corps ?

4) Soit $\mathbf{X}$ une matrice de $\mathbf{V}$ telle que $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{4b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{(a,b)\in \mathbb{R}^2}$

a) Montrer que $\mathbf{X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=0}$.

b) On suppose que $\mathbf{a^2-4b^2\neq 0}$

Montrer que $\mathbf{X}$ admet un inverse dans $\mathbf{V}$ qu'on déterminera.

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$.

Soit $\mathbf{u}$ un nombre complexe différent de $(\mathbf{1-i})$

1) a) Développer $(\mathbf{iu-1-i})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $\mathbf{z}$: $\mathbf{(E): \ z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0}$

2) Soient les points $\mathbf{A((1+i)u-2i)}$, $\mathbf{B((1-i)u+2)}$, $\mathbf{U(u)}$ et $\mathbf{\Omega(2-2i)}$.

a) Déterminer $\mathbf{k}$ l'affixe du point $\mathbf{K}$ milieu du segment $[\mathbf{AB}]$, puis déterminer le vecteur de la translation qui transforme $\mathbf{U}$ en $\mathbf{K}$.

b) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre $\mathbf{\Omega}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que : $\mathbf{R(A)=B}$.

c) En déduire que les droites (ΩA) et (AB) sont perpendiculaires.

d) A partir du point U expliquer une méthode de construction des points A et B.

3) On pose $u = (1+i)a - 2i$ tel que $a \in IR$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

b) En déduire que les points A, B et U sont alignés.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

n est un entier naturel tel que $n \geq 4$

Une urne U_1 contient n boules indiscernables au toucher : 1 Boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

Une urne U_2 contient n boules indiscernables au toucher : 2 Boule rouge et $(n-2)$ boules noires.

Une urne U_3 contient n boules indiscernables au toucher : 3 Boule rouge et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience suivante :

On choisit une urne parmi les trois urnes précédentes puis on en tire simultanément deux boules.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

2) a) Montrer que : $p[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

b) Montrer que : $p[X=1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

a) En déduire la loi de probabilité de la variable X.

3) Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

Bon Courage

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

On rappelle que $(M_2(IR), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose pour tout $(x,y) \in IR^* \times IR$: $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$.

Soit l'ensemble: $F = \{M(x,y) / (x,y) \in IR^* \times IR\}$.

1) a) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(IR), \times)$

b) Montrer que $(F, \times)$ est un groupe non commutatif.

2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x,0)$ de F tel que $x \in IR^*$

Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(F, \times)$.

3) Soit $E = IR^* \times IR$.

L'ensemble E est muni d'une loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x,y) \in E)(\forall (a,b) \in E) \quad ; \quad (x,y) \perp (a,b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a}\right)$$

On considère l'application φ de $(F, \times)$ vers $(E, \perp)$ définie par : $\varphi(M(x,y)) = (x,y)$

a) Calculer : $(1,1) \perp (2,3)$ et $(2,3) \perp (1,1)$.

b) Montrer que φ est isomorphisme.

c) En déduire la structure de $(E, \perp)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Soit $\mathbf{m}$ un nombre complexe différent de 1.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m): \quad z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Résoudre l'équation (E_m).

c) Déterminer les deux valeurs de m sous forme algébrique pour que le produit des solutions de l'équation (E_m) soit égal à 1.

2) On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

Dans le cas $m=e^{i\theta}$ et $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs m, $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

3) Déterminer l'ensemble des points M tels les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

4) a) Démontrer que la transformation R qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Démontrer que le nombre $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$.

1) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, le nombre a_n est pair.

b) Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles $a_n\equiv 0[3]$.

2) Soit p un entier premier tel que $p>3$.

a) Montrer que : $2^{p-1}\equiv 1[p]$ et $3^{p-1}\equiv 1[p]$ et $6^{p-1}\equiv 1[p]$.

b) Montrer que p divise a_{p-2}.

c) Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n\wedge q=q$.

Bon Courage

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne $*$ définie par : $x*y=x+y-3xy$

1) a) Vérifier que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $(1-3x)(1-3x)=1-3(x*y)$

b) Montrer que $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$ est un groupe commutatif.

2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(x)=1-3x$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$.

b) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)=]-\infty,1/3[$ vers est un groupe commutatif.

c) Montrer que $(]-\infty,1/3[,*)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$.

3) Pour tout x de $\mathbb{R}-\{1/3\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $x^{(0)}=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1/3\})(\forall n\in\mathbb{N})$; $\varphi(x^{(n)})=(\varphi(x))^n$

b) En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et de n.

4) L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne T définie par : $x*y=x+y-\frac{1}{3}$

a) Montrer que $(IR\ ,\ T)$ est un groupe commutatif.
b) Montrer que $(IR\ ,\ T,\ *)$ est un corps commutatif.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère l'application r qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Et l'application h qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$. On pose : $F = hor$

1) Déterminer la nature de chacune des applications r et h.
2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que a est un complexe donné différent de i.
On pose : $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$.
   a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$.
   b) Vérifier que Ω est le seul point vérifiant $F(\Omega) = \Omega$
3) a) Déterminer en fonction du nombre complexe a, les nombres complexes b, c et d affixes respectifs des points B, C et D.
   b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.
   c) Montrer que le point Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$
   d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartienne à l'axe des réels (des abscisses).

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher :
trois boules rouges et une boule blanche.
On tire au hasard les boules de l'urne l'une après l'autre avec remise jusqu'à obtenir deux boules successives de même couleur et on arrête le processus du tirage. Soit X la variable aléatoire égale à l'ordre de la boule de la dernière boule tirée.

1) Calculer la probabilité de de chacun des événements $[X=2]$ et $[X=3]$.
2) Soit k un entier naturel non nul.
Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$
   a) Montrer que : $p[X=2k] = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$
   b) Montrer que : $p[X=2k+1] = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Bon Courage

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

On rappelle que $(IR,+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(IR),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout couple $(a,b) \in IR^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ -b/\sqrt{3} & a \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in IR^2\}$

1) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(IR),+,\cdot)$.

b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel E.

2) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de C^* vers E^* définie par :

$(\forall(a,b)\in IR^2)$; $\varphi(a+ib)=M(a,b)$

a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(IR),\times)$

b) Montrer que φ est un isomorphisme de $(IR^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

3) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

4) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J\times x^3=I$ avec $x^3=x\times x\times x$

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Soit a un nombre complexe non nul et $\bar{a}$ son conjugué.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue z :

$$(E_a):\quad iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a)

b) Résoudre l'équation (E_a).

2) Montrer que a est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $Re(a)=Im(a)$.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On suppose que $Re(a)=Im(a)$

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, $i\bar{a}$ et $(1+ia)$.

3) On pose : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$.

a) Vérifier que : $\bar{z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $Im(a)=\dfrac{1}{2}$

4) On suppose dans cette question que $Im(a)\neq\dfrac{1}{2}$.

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$. Soit E le milieu de $[BC]$.

a) Déterminer b' et c' les affixes respectifs des points B' et C'.

b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ et que $B'C'=2AE$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Partie : I On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): \ 35u - 96v = 1$.

1) Montrer que le couple $(11;4)$ est une solution particulière de (E) .
2) Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E) .

Partie : II On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F): \quad x^{35} \equiv 2[97]$.

1) Soit x une solution de l'équation (F) .
   a) Montrer que le nombre 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux.
   b) Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$
   c) Montrer que : $x \equiv 2^{11}[97]$
2) Montrer que si le nombre entier x vérifie la condition $x \equiv 2^{11}[97]$, alors x est solution de l'équation (F) .
3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (F) est l'ensemble des nombres entiers naturels de la forme $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Bon Courage

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel·

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On pose $I = M(1,0)$, $J = M(0,1)$ et $0 = M(0,0)$

1) a) Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
   b) Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel réel $(F, +, \cdot)$, en déduire sa dimension.
2) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.
   b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
3) Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Montrer que $(1, \alpha)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ réel .
4) Soit ψ l'application de $\mathbb{C}$ vers F définie par :

$$\left(\forall (m,n) \in \mathbb{R}^2\right) \quad ; \quad \psi(m + in) = M(m,n) = \begin{pmatrix} m+n & -n \\ 5n & m-3n \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que $J^2 = -2(I + J)$ et $\psi(\alpha) = J$
   b) Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l'application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(F, \times)$
   c) On prend $\alpha = -1 + i$. Ecrire la matrice J^{2007} dans la base Montrer que $J^2 = -2(I + J)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'ensemble $(H) = \left\{ M(z) \in (P) \ / \ z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \right\}$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (H) .
   b) Montrer que (H) est une hyperbole et déterminer son centre, ses sommets et ses asymptotes dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Construire (H).

2) $M(a)$ et $M(b)$ sont deux points de (H). On pose $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$

a) Montrer que $M(\varphi(a,b)) \in (H)$

b) Montrer que $\varphi(a,1) = 1$ et que $\varphi(a,\bar{a}) = 1$

3) L'ensemble est muni de la loi de composition interne $(*)$ telle que pour tout $M(a)$ et $M(b)$ de (H) : $M(a) * M(a) = M(\varphi(a,b))$. Montrer que $((H),*)$ est un groupe commutatif.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ où a, b, p et q des entiers relatifs tels que $p \wedge q = 1$.

1) a) montrer qu'il existe un couple $(u_0\,;v_0)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $u_0p + v_0q = 1$.

b) Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système (S).

2) Soit x une solution du système (S), montrer que le nombre pq divise le nombre $x - x_0$.

3) Soit x un entier relatif tel que pq divise le nombre $x - x_0$, montrer que x est solution du système (S).

4) En déduire l'ensemble solution du système (S).

5) Résoudre dans le système : $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

n est un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
L'urne numéro k $(1 \leq k \leq n)$ contient n boules indiscernables au toucher : k Boule blanches et $(n-k)$ boules noires.
On choisit une urne parmi les urnes précédentes puis on en tire une seule boule.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) Calculer la probabilité pour que le tirage se fait d'une urne portant un numéro impaire.
3) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche, sachant qu'elle provienne d'une urne portant un numéro impaire.

Bon Courage

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

Partie : I Soit l'ensemble $E = \mathbb{R} - \{1/\sqrt{2}\}$. On pose pour tout couple (a,b) de E : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1) a) Montrer que pour tout couple (a,b) de E : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

b) Montrer que la loi $\perp$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E,\perp)$ est un groupe commutatif.

Partie : II On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $a \in E$, on pose $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \{M(a)/a \in \mathbb{R}\}$

1) a) On pose : $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$. vérifier que $A^2=-2A$ et que $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$

b) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(IR),\times)$.

2) Soit φ l'application de $(E,\perp)$ vers $(F,\times)$ définie par :

$(\forall a\in E)\ ;\ \varphi(a)=M(a)$

a) Montrer que φ est un isomorphisme .

b) En déduire la structure de $(F,\times)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

Soit a un nombre complexe non nul.

Partie I :

1) a) Vérifier que le nombre $u=a+i$ est une solution de l'équation :

$$(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$$

b) Déterminer v la deuxième solution de l'équation (E).

2) On suppose que $|a|=1$.

a) Montrer que : $\frac{u}{v}\in IR$.

b) Vérifier que : $u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$

c) En déduire que : $\arg(u)=\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

3) Montrer que : $|u|+|v|\geq 2$

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

Soit m un nombre réel strictement plus grand que 2. (E_m) est l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe tel que : $|u|+|v|=m$

1) Montrer que l'ensemble est ellipse de centre O origine du repère.

2) On pose : $a=x+iy$ où x et y sont deux nombres réels.

a) Montrer que l'équation cartésienne de l'ellipse (E_m) est : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$

b) Construire l'ellipse (E_4).

c) Soient les points $A\left(\sqrt{3}\right)$ et $B(2i)$ sommets de l'ellipse (E_4). Montrer que la droite (AB) est tangente à l'ellipse $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

On considère dans Z^2 l'équation : $(E):\ 195x-232y=1$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 232 et 195.

b) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est $S=\{(163+232k\ ;137+195k)\,/\,k\in Z\}$.

c) Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant les relations : $0\leq d\leq 232$ et $195d\equiv 1[232]$

2) Montrer que le nombre 233 est premier .

3) Soit A l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 233. On considère l'application f de A vers A définit par : quel que soit a de A, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233.

On admet que $(\forall a\in A-\{0\})\ ;\ a^{232}\equiv 1[232]$

a) Montrer que quels que soient a et b de A, si $f(a)=f(b)$ alors $a=b$

b) En déduire que l'application est une bijection, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Analyse integrales