Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On pose pour tout x réel, $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ x^2 & 2x & 1\end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$.

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(x)=M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

b) Montrer que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

c) Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de $M(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

3) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5X=B$ avec $A=M(2)$ et $B=M(12)$

4) Soit l'ensemble $F=\{M(\ln x)/x\in\mathbb{R}_+^*\}$. Montrer que est un sous-groupe de $(E,\times)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que le nombre $a=1+i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).

2) a) Montrer que $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$. b) Ecrire a sous forme trigonométrique.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$.
Soit le cercle (Γ) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω, centre du cercle (Γ).

b) Montrer que O et C sont deux points du cercle (Γ).

c) Montrer que le complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher :
Deux boules rouges et dix boules blanches.
On tire au hasard les boules de l'urne l'une après l'autre sans remise jusqu'au tirage de la première boule blanche et on arrête le tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées .

1) a) déterminer les valeurs de la variable X.

b) Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

c) Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

d) Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

2) a) Montrer que $E(X)=\dfrac{13}{11}$. ($E(X)$ est l'espérance mathématique de la variable X).

b) Calculer $E(X^2)$ en déduire $V(X)$ ($V(X)$ est la variance de la variable X).

Partie I :

On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbf{I}=[0,1]$ par : $\mathbf{f(1)=0}$ et $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)}}$; $\mathbf{0\le x<1}$

$(\mathbf{C_f})$ est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$ unité 2 cm.

1) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est continue à gauche au point 0. 0,5 pts
2) Etudier la dérivabilité de la fonction $\mathbf{f}$ à gauche au point 0. 0,5 pts
3) Etudier les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $\mathbf{I}$ puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts
4) a) Montrer que la courbe $(\mathbf{C_f})$ admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\mathbf{\dfrac{e-1}{e}}$. 0,5 pts
   b) Construire la courbe $(\mathbf{C_f})$ et sa demi-tangente à droite au point 0. 0,75 pts
5) Montrer qu'il existe un réel unique $\boldsymbol{\alpha}$ dans l'intervalle $\mathbf{I}$ vérifiant : $\mathbf{f(\alpha)=\alpha}$ 0,5 pts
6) a) Montrer que la fonction $\mathbf{I}$ est une bijection de $\mathbf{I}$ vers I . 0,5 pts
   b) Déterminer $\mathbf{f^{-1}(y)}$ pour tout $\mathbf{y}$ de $\mathbf{I}$. 0,5 pts

Partie II :

On pose $\mathbf{I_0=\int_0^1 f(t)dt}$ et pour tout entier non nul n : $\mathbf{I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt}$ considère.

1) Montrer que que la suite $\mathbf{(I_n)_{n\ge0}}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,75 pts
2) Montrer que : $(\forall \mathbf{n\ge0})$; $\mathbf{0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}}$ puis déterminer la limite de la suite $\mathbf{(I_n)_{n\ge0}}$.

Partie III :

Pour tout réel x de l'intervalle $\mathbf{J}=[\mathbf{0},\mathbf{1}[$ et pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$\mathbf{F_0(x)=\int_0^x f(t)dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)}$$

1) Montrer que : $(\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N})\ (\forall \mathbf{x}\in\mathbf{J})$; $\mathbf{F(x)-S_n(x)=\int_0^x\dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt}$ 1 pts
2) a) Montrer que la fonction $\mathbf{x}\ \alpha\ \mathbf{(1-x)(1-\ln(1-x))}$ est strictement décroissante sur $\mathbf{J}$. 0,5 pts
   b) En déduire que la fonction $\mathbf{t}\ \alpha\ \mathbf{\dfrac{f(t)}{1-t}}$ est strictement croissante sur $[\mathbf{0},\mathbf{x}]$ pour tout x de $\mathbf{J}$. 0,5 pts
3) a) Montrer que : $(\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N})\ (\forall \mathbf{x}\in\mathbf{J})$; $\mathbf{0\le F(x)-S_n(x)\le\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}$ 1 pts
   b) En déduire que pour tout x de l'intervalle J : $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)}$. 0,5 pts
4) a) Déterminer $\mathbf{F(x)}$ pour tout x de l'intervalle J . 0,5 pts
   b) Déterminer la limite: $\mathbf{\lim\limits_{x\to1^-}F(x)}$. 0,25 pts

Bon Courage