Exercice .1

Les parties $\mathbf{I}$ et $\mathbf{II}$ sont indépendants.

Partie : I l'ensemble $\mathbf{I}=\left]0,+\infty\right[$ est muni de la loi $*$ telle que : $(\forall(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbf{I}^2)$; $\mathbf{a}*\mathbf{b}=\mathbf{e}^{\ln(a)\ln(b)}$

1) Montrer que $*$ est commutative et associative dans $\mathbf{I}$.
2) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans $\mathbf{I}$, qu'on déterminera.
3) a) Montrer que $(\mathbf{I}-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.
   b) Montrer que $\mathbf{J}=\left]1,+\infty\right[$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbf{I}-\{1\},*)$.
4) l'ensemble $\mathbf{I}=\left]0,+\infty\right[$ est muni de la loi $\times$. ($\times$ est le produit des nombres sur $\mathbb{R}$)
   a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.
   b) Montrer que la loi $*$ est un corps commutatif.

Partie : II On considère la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$.
2) En déduire que la matrice $\mathbf{A}$ n'a pas de matrice inverse.

Exercice .2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Déterminer les racines carrées du complexe $3+4i$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ 4z^2-10iz-7-i=0$
2) Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ les deux solutions de l'équation (E) tel que $\mathrm{Re}(a)=0$ et soient les deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.
   a) Vérifier que : $\dfrac{b}{a}=1-i$
   b) En déduire que le triangle $\mathbf{AOB}$ est isocèle rectangle en $\mathbf{A}$.
3) Soit $\mathbf{C}$ un point d'affixe $\mathbf{c}$ différent de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ l'image du point $\mathbf{B}$ par la rotation de centre $\mathbf{C}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   Soit $\mathbf{K}$ l'image du point $\mathbf{D}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
   a) Déterminer $\mathbf{c}$ en fonction du nombre complexe $\mathbf{d}$ affixe du point A.
   b) Déterminer en fonction de $\mathbf{c}$ le nombre complexe $\mathbf{k}$ affixe du point $\mathbf{K}$.
   c) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{k-c}{a-c}$, en déduire la nature du triangle $\mathbf{ACK}$.

Exercice .3

1) Déterminer les nombres entiers naturels $\mathbf{m}$ tels que : $m^2+1\equiv 0\,[5]$.
2) Soit $\mathbf{p}$ un entier naturel premier tel que : $p=3+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$

   et soit $\mathbf{n}$ un entier naturel tel que $n^2+1\equiv 0\,[p]$
   a) Vérifier que $(n^2)^{2k+1}\equiv -1\,[p]$.
   b) Montrer que $\mathbf{n}$ et $\mathbf{p}$ sont premiers entre eux.
   c) En déduire que $(n^2)^{2k+1}\equiv 1\,[p]$
3) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel $\mathbf{n}$ vérifiant la relation $n^2+1\equiv 0\,[p]$.

Exercice .4 — Bac National Sc maths - 2010 - Session : 1 — 6,25 points

Partie :I

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $\mathbf{I}=[0,+\infty[$ par: $\mathbf{f(x)=4x\,e^{-x^2}}$

(C_f) est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,25 pts
2) Etudier les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur $[0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations. 0,5 pts
3) Déterminer l'équation de la demi-tangente de (C_f) à l'origine du repère puis construire (C_f). 0,5 pts

   (On admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f))
4) Calculer l'intégrale : $a=\int_0^1 f(x)dx$, en déduire en $\mathbf{cm^2}$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=1$. 0,5 pts

Partie :II

$\mathbf{n}$ est un entier naturel tel que $n\geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f_n(x)=4x^n\,e^{-x^2}$

1) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $e^{-x^2}\leq e^{-x}$. 0,5 pts
   b) En déduire la limite de la fonction f_n quand x tend vers $+\infty$. 0,5 pts
2) Etudier les variations de la fonction f_n puis dresser son tableau de variations. 0,5 pts
3) Montrer que pour tout $n\geq 2$, il existe un réel unique $u_n\in]0;1[$ tel que $f_n(u_n)=1$ 0,5 pts
4) a) Vérifier que $(\forall n\geq 2)$; $f_{n+1}(u_n)=u_n$. 0,5 pts
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathbf{f}$. 0,25 pts
5) On pose : $L=\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$. 0,75 pts
   a) Montrer que : $0<L\leq 1$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n\geq 0)$; $\frac{-\ln 4}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln 4}{n}$. 0,5 pts
   c) En déduire que : $L=1$. 0,5 pts

Exercice .5 — Bac National Sc maths - 2010 - Session : 1 — 3,75 points

On considère la fonction $\mathbf{F}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est impaire. 0,5 pts
2) On pose pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$: $\varphi(x)=\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$
   a) Vérifier que : $(\forall x>0)$; $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$. 0,25 pts
   b) Montrer que $\mathbf{F}$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$. 0,5 pts
   c) En déduire le sens de variations de $\mathbf{F}$ sur $]0,+\infty[$. 0,5 pts
3) a) En utilisant le TAF montrer que : $(\forall x>0)(\exists c\in]x;2x[)$; $F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}$. 0,5 pts

b) en déduire que : $(\forall x>0)$; $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$ 0,5 pts

c) Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ 0,5 pts

d) Vérifier que : $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) < \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$ et $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ 0,5 pts

En déduire que l'équation : $F(x)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0,+\infty[$

Bon Courage