Exercice .1

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a\end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $V=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que $\mathbf{V}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ et déterminer une base de $\mathbf{V}$.

2) a) Montrer que $\mathbf{V}$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(V,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Calculer $M(\frac{1}{2},\frac{-1}{4})\times M(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

b) l'anneau $(V,+,\times)$ est-il un corps ?

4) Soit $\mathbf{X}$ une matrice de $\mathbf{V}$ telle que $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

a) Montrer que $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=0$.

b) On suppose que $a^2-4b^2\neq 0$

Montrer que $\mathbf{X}$ admet un inverse dans $\mathbf{V}$ qu'on déterminera.

Exercice .2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $\mathbf{u}$ un nombre complexe différent de $(1-i)$

1) a) Développer $(iu-1-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $\mathbf{z}$: $(E):\ z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$

2) Soient les points $A((1+i)u-2i)$, $B((1-i)u+2)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$.

a) Déterminer $\mathbf{k}$ l'affixe du point $\mathbf{K}$ milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation qui transforme $\mathbf{U}$ en $\mathbf{K}$.

b) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que : $R(A)=B$.

c) En déduire que les droites (ΩA) et (AB) sont perpendiculaires.

d) A partir du point $\mathbf{U}$ expliquer une méthode de construction des points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

3) On pose $u=(1+i)a-2i$ tel que $a\in\mathbb{R}$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $\mathbf{a}$.

b) En déduire que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{U}$ sont alignés.

Exercice .3

$\mathbf{n}$ est un entier naturel tel que $n\geq 4$

Une urne U_1 contient $\mathbf{n}$ boules indiscernables au toucher : $\mathbf{1}$ Boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

Une urne U_2 contient $\mathbf{n}$ boules indiscernables au toucher : $\mathbf{2}$ Boule rouge et $(n-2)$ boules noires.

Une urne U_3 contient $\mathbf{n}$ boules indiscernables au toucher : $\mathbf{3}$ Boule rouge et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience suivante :

On choisit une urne parmi les trois urnes précédentes puis on en tire simultanément deux boules.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

2) a) Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{8}{3n(n-1)}$

b) Montrer que : $p[X=1]=\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

c) En déduire la loi de probabilité de la variable X.

3) Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1) a) Etudier les variations de la fonction g . 0,5 pts

b) Dresser le tableau de variations de g . 0,5 pts

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\left]\ln 4;\ln 6\right[$. 0,5 pts

(On prend $\ln 2\approx 0{,}7$ et $\ln 3\approx 1{,}1$)

b) Etudier le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}_+$. 0,5 pts

1) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=2(1-e^{-U_n})$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\leq U_n\leq\alpha$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}-U_n=g(U_n)$. 0,25 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. 0,25 pts

d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,5 pts

Partie II :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 0,5 pts

2) a) Vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$. 0,5 pts

b) Montrer que $f'(x)=g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de f. 0,75 pts.

3) Tracer la courbe (C_f). (On prend $\alpha\approx 1{,}5$) 1 pts

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(0)=-\ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x>0)\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt$$

1) a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x>0);\ F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$

b) montrer que : $(\forall x>0)$; $e^x\ln 2\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\leq e^{2x}\ln 2$ 0,5 pts 0,5 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$ en déduire que la fonction est continue à droite au point 0 . 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0);\ F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$ 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 0,25 pts

3) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que : $F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2$ 0,5 pts

4) a) Soit x un élément de l'intervalle $]0,+\infty[$, Montrer qu'il existe un réel c de $]0,x[$ tel que:

$F(x)-F(0)=-\dfrac{1}{2}xe^{2c}$. 0,75 pts (utiliser le TAF deux fois)

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$,

$$-\frac{1}{2}e^{2x}\le\frac{F(x)-F(0)}{x}\le-\frac{1}{2} .$$ 0,75 pts

c) En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que $F'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$. 0,25 pts

Bon Courage