Exercice .1

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

On rappelle que $(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On pose pour tout $(x,y)\in IR^*\times IR$: $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$.

Soit l'ensemble: $F=\{M(x,y)/(x,y)\in IR^*\times IR\}$.

1) a) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(IR),\times)$

b) Montrer que $(F,\times)$ est un groupe non commutatif .

2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x,0)$ de F tel que $x\in IR^*$

Montrer que $(G,\times)$ est un sous-groupe du groupe $(F,\times)$.

3) Soit $E=IR^*\times IR$.

L'ensemble E est muni d'une loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall(x,y)\in E)(\forall(a,b)\in E)\quad ;\quad (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\,,bx+\frac{y}{a}\right)$$

On considère l'application φ de $(F,\times)$ vers $(E,\perp)$ définie par : $\varphi(M(x,y))=(x,y)$

a) Calculer : $(1,1)\perp(2,3)$ et $(2,3)\perp(1,1)$.

b) Montrer que φ est isomorphisme.

c) En déduire la structure de $(E,\perp)$.

Exercice .2

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Soit m un nombre complexe différent de 1.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m):\qquad z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Résoudre l'équation (E_m).

c) Déterminer les deux valeurs de m sous forme algébrique pour que le produit des solutions de l'équation (E_m) soit égal à 1.

2) On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

Dans le cas $m=e^{i\theta}$ et $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs m, $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2) a) Démontrer que la transformation R qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Démontrer que le nombre $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice .3

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$.

1) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n , le nombre a_n est pair.

b) Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles $a_n\equiv 0[3]$.

2) Soit p un entier premier tel que $p>3$.

a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1[p]$.

b) Montrer que p divise a_{p-2}.

c) Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n \wedge q = q$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

n est un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f_n(0)=0$ et $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$; $(x>0)$

Partie I : (C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (poser $x=t^n$) 0,5 pts

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0. 0,25 pts

c) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$. 1 pts

2) a) Etudier les variations de la fonction f_1. 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction f_2. 0,5 pts

3) a) Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2). 0,25 pts

b) Construire (C_1) et (C_2). (on admet que le point A(1 ;1) est un point d'inflexion pour (C_2)) 0,5 pts

Partie II : On considère la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\int_{e^x}^{1} \dfrac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]-\infty;0]$ et que : $(\forall x<0)\ ; F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ 0,5 pts

b) En déduire le sens de variations de F sur $]-\infty;0]$. 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x<0); \dfrac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \le F(x) \le \dfrac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$ 0,25 pts

b) Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $]0;+\infty[$. 0,25 pts

c) Montrer que $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_n(t)dt = \dfrac{3}{4}$ 0,25 pts

3) On suppose que F admet une limite L quand x tend vers $-\infty$, montrer que : $\dfrac{3}{8} \le L \le \dfrac{3}{4}$. 0,25 pts

Partie III :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $U_n = \int_1^e f_n(x)dx$

1) a) Montrer que : $(\forall n\ge1)\ ;\ U_n>0$ 0,5 pts

b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$ 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall n\ge1)\ ;\ U_{n+1}\le U_n$ 0,25 pts

d) En déduire que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est convergente . 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall n\ge1)\ ;\ U_{n+1} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}U_n$ 0,5 pts

b) En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par les courbes (C_1) et (C_2) les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. 0,5 pts

3) a) Montrer que : $(\forall n\ge2)$; $\dfrac{1}{n+1} \le U_n \le \dfrac{1}{n-1}$ (utiliser les questions précédentes) 0,75 pts

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. 0,5 pts

4) $\mathbf{a}$ est un nombre réel différent de U_1.

On considère la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $V_1 = a$ et $(\forall n \geq 1)\ ; V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n$

et pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $d_n = |V_n - U_n|$

a) Montrer que : $(\forall n \geq 1)\ ; d_n = \frac{n!}{2^{n-2}} d_1$ 0,25 pts

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$. 0,5 pts

c) En déduire que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est divergente. 0,25 pts

Bon Courage