Exercice .1

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne $*$ définie par : $x*y = x+y-3xy$

1) a) Vérifier que : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $(1-3x)(1-3x) = 1-3(x*y)$

b) Montrer que $(\mathbb{R}-\{1/3\}, *)$ est un groupe commutatif.

2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(x) = 1-3x$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}-\{1/3\}, *)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

b) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, 1/3[$ vers est un groupe commutatif.

c) Montrer que $(]-\infty, 1/3[, *)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}-\{1/3\}, *)$.

3) Pour tout x de $\mathbb{R}-\{1/3\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $x^{(0)} = 0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1/3\})(\forall n\in\mathbb{N})$; $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

b) En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et de n.

4) L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne T définie par : $x*y = x+y-\frac{1}{3}$

a) Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $(\mathbb{R}, T, *)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application r qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Et l'application h qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z+3i$. On pose : $F = hor$

1) Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que a est un complexe donné différent de i.
On pose : $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$.

a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$.

b) Vérifier que Ω est le seul point vérifiant $F(\Omega) = \Omega$

3) a) Déterminer en fonction du nombre complexe a, les nombres complexes b, c et d affixes respectifs des points B, C et D.

b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.

c) Montrer que le point Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartienne à l'axe des réels (des abscisses).

Exercice .3

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher :
trois boules rouges et une boule blanche.
On tire au hasard les boules de l'urne l'une après l'autre avec remise jusqu'à obtenir deux boules successives de même couleur et on arrête le processus du tirage. Soit X la variable aléatoire égale à l'ordre de la boule de la dernière boule tirée.

1) Calculer la probabilité de de chacun des événements $[X=2]$ et $[X=3]$.

2) Soit k un entier naturel non nul.
Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

a) Montrer que : $p[X=2k]=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

b) Montrer que : $p[X=2k+1]=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left]-1/2;+\infty\right[$ par: $f(0)=2$ et $f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}$; $x\neq 0$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue au point 0 . 0,5 pts

2) Pour tout réel non nul **a** de l'intervalle I on considère la fonction numérique f définie sur I par :

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$$

a) Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ en déduire qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$ 0,5 pts

b) En déduire que la fonction est dérivable au point 0 et que $f'(0)=-2$. 0,75 pts

3) a) Montrer que f est dérivable sur $I-\{0\}$ et que :

$$(\forall x\in I-\{0\})\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}\quad \text{avec}\quad g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x\in I-\{0\})$; $g(x)<0$ 0,5 pts

c) En déduire les variations de la fonction f. 0,25 pts

4) a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. 0,5 pts

b) Montrer qu'il existe un réel α unique de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$. 0,5 pts

c) Construire la courbe (C_f) (On prend $\alpha\approx 1,3$)

Partie :II

1) On pose $J=[1;\alpha]$ et $(\forall x\in I)$; $\varphi(x)=\ln(1+2x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et $(\forall x\in I)$; $0<\varphi'(x)<\frac{2}{3}$. 0,5 pts

b) Vérifier que : $\varphi(\alpha)=\alpha$ et que $\varphi(J)\subset J$. 0,75 pts

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=\ln(1+2U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n\in J$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

Partie :III

1) On considère la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis calculer $F'(x)$. 0,5 pts

b) En déduire le sens des variations de F sur I . 1 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 1)$; $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ 0,5 pts

3) On suppose que F admet une limite L à droite au point $-\frac{1}{2}$.

4) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[-1/2;+\infty[$ par:

$$G(-\frac{1}{2}) = L \quad \text{et} \quad G(x) = F(x) \ ; \ x \in I$$ 0,5 pts

a) En utilisant le TAF montrer : $(\forall x \in I)$; $F(x) - L \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) En déduire que la fonction G est non dérivable à droite au point $-\frac{1}{2}$. 0,5 pts

Bon Courage