Exercice .1

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$. Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{3}\\ -b/\sqrt{3} & a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel E.
2) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :
   $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad;\quad \varphi(a+ib)=M(a,b)$
   a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$
3) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.
4) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J\times x^3=I$ avec $x^3=x\times x\times x$

Exercice .2

Soit a un nombre complexe non nul et $\bar{a}$ son conjugué.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue z :

$$(E_a):\qquad iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a)
   b) Résoudre l'équation (E_a).
2) Montrer que a est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On suppose que $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, $i\bar{a}$ et $(1+ia)$.

1) On pose : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$.
   a) Vérifier que : $\bar{z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$
   b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$
2) On suppose dans cette question que $\mathrm{Im}(a)\neq\dfrac{1}{2}$.

   Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$. Soit E le milieu de $[BC]$.
   a) Déterminer b' et c' les affixes respectifs des points B' et C'.
   b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ et que $B'C'=2AE$.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Partie : I On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): \ 35u - 96v = 1$.

1) Montrer que le couple $(11;4)$ est une solution particulière de (E).

2) Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E).

Partie : II On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F): \ x^{35} \equiv 2[97]$.

1) Soit x une solution de l'équation (F).

   a) Montrer que le nombre 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux.

   b) Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$

   c) Montrer que : $x \equiv 2^{11}[97]$

2) Montrer que si le nombre entier x vérifie la condition $x \equiv 2^{11}[97]$, alors x est solution de l'équation (F).

3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (F) est l'ensemble des nombres entiers naturels de la forme $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ et interpréter déométriquement le résultat obtenu. 0,5 pts

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau de variations de f. 0,5 pts

   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$ tel que $0 < \alpha < 1$. 0,5 pts

   d) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ 0,5 pts

2) Tracer la courbe (C_f). (On prend $\alpha \approx 0,4$) 0,5 pts

Partie II :

On considère les deux fonctions φ et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(0) = 1 \ ; \ \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}dt$$

1) a) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists c \in]0;x[) \ ; \ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}$ 0,5 pts

   b) En déduire que $\int_0^x e^{-t^2}dt < 1$. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)dt$. 0,5 pts

   b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \ ; \ g'(x) = f(x)$

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β tel que $\alpha < \beta < 1$. 0,5 pts

3) a) Montrer que la fonction φ est continue à droite au point 0 0,5 pts

   b) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$ 0,5 pts

   c) Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$ 0,75 pts

   d) Montrer $\varphi([0;1]) \subset [0;1]$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \ ; \ \int_0^x t^2 e^{-t^2}dt \le \frac{x^3}{3}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x \in]0;1[)$; $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$ 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall x \in IR_+)$; $\varphi(x) = x \iff g(x) = 0$ 0,25 pts

5) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 = 2/3$ et $(\forall n \in IN)$; $U_{n+1} = \varphi(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $0 \leq U_n \leq 1$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $|U_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

Bon Courage