Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(IR),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a,b)\in IR^2$, on pose $M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\{M(a,b)/(a,b)\in IR^2\}$. On pose $I=M(1,0)$, $J=M(0,1)$ et $0=M(0,0)$

1) a) Montrer que $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.
   b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(F,+,\cdot)$, en déduire sa dimension.
2) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(IR),\times)$.
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3) Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à IR. Montrer que $(1,\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C},+,\cdot)$ réel.
4) Soit ψ l'application de $\mathbb{C}$ vers F définie par :

$$\left(\forall(m,n)\in IR^2\right)\ ;\quad \psi(m+in)=M(m,n)=\begin{pmatrix} m+n & -n \\ 5n & m-3n \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que $J^2=-2(I+J)$ et $\psi(\alpha)=J$
   b) Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l'application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(F,\times)$
   c) On prend $\alpha=-1+i$. Ecrire la matrice J^{2007} dans la base Montrer que $J^2=-2(I+J)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère l'ensemble $(H)=\left\{M(z)\in(P)\ /\ z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\right\}$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (H).
   b) Montrer que (H) est une hyperbole et déterminer son centre, ses sommets et ses asymptotes dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
   c) Construire (H).
2) $M(a)$ et $M(b)$ sont deux points de (H). On pose $\varphi(a,b)=a\bar{b}+\bar{a}b-\overline{ab}$
   a) Montrer que $M(\varphi(a,b))\in(H)$
   b) Montrer que $\varphi(a,1)=1$ et que $\varphi(a,\bar{a})=1$
3) L'ensemble est muni de la loi de composition interne $(*)$ telle que pour tout $M(a)$ et $M(b)$ de (H) : $M(a)*M(a)=M(\varphi(a,b))$. Montrer que $((H),*)$ est un groupe commutatif.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} x\equiv a\,[p] \\ x\equiv b\,[q] \end{cases}$ où a, b, p et q des entiers relatifs tels que $p\wedge q=1$.

1) a) montrer qu'il existe un couple $(u_0\,;v_0)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $u_0p+v_0q=1$.
   b) Montrer que $x_0=bpu_0+aqv_0$ est une solution du système (S).
2) Soit x une solution du système (S), montrer que le nombre pq divise le nombre $x-x_0$.
3) Soit x un entier relatif tel que pq divise le nombre $x-x_0$, montrer que x est solution du système (S).
4) En déduire l'ensemble solution du système (S).

5) Résoudre dans le système : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

$\mathbf{n}$ est un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
L'urne numéro k $(1 \leq k \leq n)$ contient n boules indiscernables au toucher : k Boule blanches et $(n-k)$ boules noires.
On choisit une urne parmi les urnes précédentes puis on en tire une seule boule.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) Calculer la probabilité pour que le tirage se fait d'une urne portant un numéro impaire.
3) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche, sachant qu'elle provienne d'une urne portant un numéro impaire.

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

Partie I :

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$
   a) Etudier les variations de g. 0,25 pts
   b) Calculer les limites $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ 0,5 pts
   c) En déduire que $x_0 = 0$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$. 0,25 pts
2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + x - e^{-x}}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

   a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. 0,5 pts
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. 0,25 pts
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,25 pts
   d) Tracer la courbe (C_f). 0,5 pts
3) a) Soit n un entier naturel non nul.
   Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$. 1 pts
   b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et qu'elle est convergente. 0,5 pts
   c) Prouver que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

Partie II :

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ est équivalente à l'équation $e^{-x} = x$ 0,25 pts.
   b) Montrer que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution unique l'équation $\alpha = x_1$ et que $\dfrac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$. 0,5 pts
2) On considère la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ définie par : $y_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $y_{n+1} = e^{-y_n}$
   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{e} \leq y_n \leq 1$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$. 0,5 pts
   c) en déduire que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est convergente en déterminant sa limite 0,5 pts

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(0) = \dfrac{1}{2}\ln 2$ et $\forall x > 0$; $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

1) a) Montrer que : $(\forall t>0)$; $\frac{1}{1+t} \leq f(t) < \frac{1}{t}$. 0,25 pts

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall t \geq 0)$; $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$. 0,25 pts

b) Montrer que pour tout t appartenant à $]0;4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$: 0,5 pts

c) En déduire que F est continue à droite au point 0. 0,25 pts

3) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x>0$ 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction F sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

Bon Courage