Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

Partie : I Soit l'ensemble $E=\mathbb{R}-\left\{1/\sqrt{2}\right\}$. On pose pour tout couple (a,b) de E : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

1) a) Montrer que pour tout couple (a,b) de E : $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

b) Montrer que la loi $\perp$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E,\perp)$ est un groupe commutatif.

Partie : II On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $a\in E$, on pose $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\{M(a)/a\in\mathbb{R}\}$

1) a) On pose : $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$. vérifier que $A^2=-2A$ et que $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$

b) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) Soit φ l'application de $(E,\perp)$ vers $(F,\times)$ définie par :

$(\forall a\in E)\ ;\ \varphi(a)=M(a)$

a) Montrer que φ est un isomorphisme .

b) En déduire la structure de $(F,\times)$.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

Soit a un nombre complexe non nul.

Partie I :

1) a) Vérifier que le nombre $u=a+i$ est une solution de l'équation :

$$(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$$

b) Déterminer v la deuxième solution de l'équation (E).

2) On suppose que $|a|=1$.

a) Montrer que : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$

c) En déduire que : $\arg(u)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

3) Montrer que : $|u|+|v|\geq 2$

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

Soit m un nombre réel strictement plus grand que 2. (E_m) est l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe tel que : $|u|+|v|=m$

1) Montrer que l'ensemble est ellipse de centre O origine du repère.

2) On pose : $a=x+iy$ où x et y sont deux nombres réels.

a) Montrer que l'équation cartésienne de l'ellipse (E_m) est : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$

b) Construire l'ellipse (E_4).

c) Soient les points $A\left(\sqrt{3}\right)$ et $B(2i)$ sommets de l'ellipse (E_4). Montrer que la droite (AB) est tangente à l'ellipse $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

Exercice .3

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): \ 195x - 232y = 1$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 232 et 195.

b) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est $S = \{(163 + 232k \ ; 137 + 195k\ ) / k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant les relations : $0 \le d \le 232$ et $195d \equiv 1[232]$

2) Montrer que le nombre 233 est premier .

3) Soit A l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 233. On considère l'application f de A vers A définit par : quel que soit a de A, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233.

On admet que $(\forall a \in A - \{0\}) \ ; \quad a^{232} \equiv 1[232]$

a) Montrer que quels que soient a et b de A, si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$

b) En déduire que l'application est une bijection, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice .4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1) Montrer que pour tout x de IR : $g(x) \ge 0$. 0,5 pts

2) Montrer que $x_0 = 0$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$. 0,25 pts

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$; $x \ne 0$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) + x)$. 0,5 pts

2) Montrer que la fonction f est continue au point 0. 0,25 pts

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. 0,5 pts

b) En déduire les variations de la fonction f. 0,25 pts

4) On considère la fonction J définie sur $\mathbb{R}$ par : $J(x) = \int_0^x te^{-t}dt$

a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$. 0,5 pts

b) Montrer que pour tout x de IR : $\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le J(x) \le \dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ 1 pts

c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \le \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \le \dfrac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$ 0,5 pts

d) En déduire que la fonction f est dérivable au point 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ 0,75 pts

5) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^3}\left(e^x(x-1) + 2 + x\right)$. 0,5 pts

b) Etudier le signe de $e^x(x-1) + 2 + x$ sur IR . 0,5 pts

c) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$. 0,25 pts

d) Construire (C_f). 0,5 pts

Partie III :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que $x = \ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = x$. 0,25 pts

2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq U_n \leq 1$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|U_n - \ln 2|$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

Partie IV :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1}dt$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) < \frac{x^2}{e^x - 1}$. 0,5 pts

b) Montrer que la fonction F est continue au point 0. 0,25 pts

c) Montrer que la fonction F est dérivable au point 0 et que $F'(0) = 1$. 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1}f(x)$ pour $x \neq 0$ 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction F. 0,25 pts

Bon Courage