I. Proposition ou Phrase mathématique :

On peut dire, en général, que la logique est un moyen qui contrôle le travail de la pensée en s'appuyant sur des règles précises, pour le protéger contre l'erreur …
La logique est le langage de l'esprit, mais elle s'exprime à travers une langue, n'importe laquelle…
Les éléments de base de la logique sont des phrases d'une langue donnée…
La phrase utilisée par la logique doit être :

- ***Grammaticalement correcte***
- ***Possède un sens et compréhensible***
- ***Et pour laquelle, on peut décider si elle est vraie ou fausse***

Une phrase employée en logique est appelée aussi : proposition, propriété, prédicat
Pour simplifier les manipulations des phrases on les symbolise avec des lettres : P ou (P) ou Q ou R etc.…
Le rôle de la logique c'est d'aider l'esprit à donner des jugements sur une phrase simple (verbe+ sujet+ complément) ou bien sur une phrase composée par deux ou plusieurs phrases simples, liées par des liens qu'on appelle « connecteurs logiques ».

II. Les connecteurs logiques :

Considérons maintenant deux propositions P et Q, ces deux propositions peuvent être composées à l'aide d'un connecteur, comme on peut chercher la négation de l'une de ces phrases.
Les connecteurs logiques de base sont :

- ✓ ***La négation d'une proposition P , on la note (nonP) ou ($\neg$ P) ou $\overline{P}$.***
- ✓ ***La conjonction logique qui est « et » , on note (P et Q)***
- ✓ ***La disjonction logique qui est « ou » , on note (P ou Q)***

D'autres connecteurs sont construits à partir des connecteurs simples précédents, c'est le cas de l'implication logique et l'équivalence logique notés de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Implcation logique :} & P \Rightarrow Q \\ \text{équivalence logique :} & P \Leftrightarrow Q\end{array}}$$

Ces deux nouveaux connecteurs sont définis par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{P \Rightarrow Q} & \textbf{Signifie} & \mathbf{\overline{P}\ \text{ou}\ Q} \\ \mathbf{P \Leftrightarrow Q} & \textbf{Signifie} & \mathbf{(P \Rightarrow Q)\ \text{et}\ (P \Leftarrow Q)} \end{array}$$

Le tableau suivant appelé table de vérité définie les valeurs de vérité des propositions composées fondamentales :

P	Q	Non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

III. Propriétés des connecteurs logiques :

$$\mathbf{non(nonP) \Leftrightarrow P}$$

$$\begin{array}{llll} (P\ \text{et}\ P) \Leftrightarrow P & (P\ \text{et}\ V) \Leftrightarrow P & (P\ \text{et}\ F) \Leftrightarrow F & (P\ \text{et}\ \overline{P}) \Leftrightarrow F \\ (P\ \text{ou}\ P) \Leftrightarrow P & (P\ \text{ou}\ V) \Leftrightarrow V & (P\ \text{ou}\ F) \Leftrightarrow P & (P\ \text{ou}\ \overline{P}) \Leftrightarrow V \end{array}$$

$\overline{(P\ \text{ou}\ Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\ \text{et}\ \overline{Q})$ *lois de Morgan* $\overline{(P\ \text{et}\ Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\ \text{ou}\ \overline{Q})$

La *Contraposée*

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

IV. Propriétés des Opérations sur les ensembles :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, par analogie on obtient (je vous laisse le soin de le montrer vous-même comme applications à la logique)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$(A \cap A) = A \quad (A \cap E) = A \quad (A \cap \phi) = \phi \quad (A \cap \overline{A}) = \phi$$
$$(A \cup A) = A \quad (A \cup E) = E \quad (A \cup \phi) = A \quad (A \cup \overline{A}) = E$$

$$\overline{(A \cap B)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \qquad \overline{(A \cup B)} = (\overline{A}\ \text{et}\ \overline{B})$$

$$(A \subset B) = (\overline{B} \subset \overline{A})$$

V. Les fonctions propositionnelles :

soit x un élément d'un ensemble E , la proposition P(x) est une proposition dont la valeur de vérité dépend de x est dite fonction propositionnelle définie dans E.

$P(x) \Leftrightarrow$ « x est une ville Africaine »

La valeur de vérité de cette proposition dépend de la valeur de la ville x, à titre d'exemples :

$P(\text{Rabat}) \Leftrightarrow$ « Rabat est une ville Africaine » est une propositio n vraie

$P(\text{Paris}) \Leftrightarrow$ « Paris est une ville Africaine » est une propositio n fausse

De cette manière, on établit une fonction définie de l'ensemble W des villes du monde vers l'ensemble des valeurs de vérité : V et F.

VI. Les quantificateurs :

Si E est un ensemble et P(x) une fonction propositionnelle définie dans E, les propositions quantifiée s'écrivent respectivement :

$(\ni x \in E)\ ;\ P(x)$: signifie qu'il nexiste au moins un élément x de E vérifiant la propriété P(x)

$(\forall x \in E)\ ;\ P(x)$: signifie que tous les éléments x de E vérifiant la propriété P(x)

les proposition peuvent contenir plusieurs quantificateurs…les exercices proposés sur le site peuvent vous aider à découvrir plusieurs choses concernant ce type de phrases….

Reste à donner les règles de négation pour les propositions quantifiées :

$$\text{non}\big((\exists x \in E)\ ;\ P(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ ;\ \overline{P(x)}$$
$$\text{non}\big((\forall x \in E)\ ;\ P(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x \in E)\ ;\ \overline{P(x)}$$

Bonne Chance