I. Introduction à la notion de fonction:

1) Fonctions polynômes :

Nous rappelons qu'une fonction linéaire s'écrit sous la forme $f(x)=ax$, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère et qu'une fonction affine s'écrit sous la forme $f(x)=ax+b$, sa représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

Les fonctions affines et linéaires sont des fonctions polynômes du premier degré.

La fonction définie par $f(x)=3x^2+x-3$ est une fonction polynôme de second degré.

En général toute fonction dont l'expression est un polynôme de degré n est dite fonction polynôme de degré n.

Ainsi la fonction définie par $f(x)=-5x^4+x^3-2x^2+3x-7$ est une fonction polynôme de degré 4 .

2) Fonctions rationnelles :

Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ‛ où P et Q . Sont des fonctions polynômes.

A titre d'exemple $f(x)=\dfrac{3x^2+x-3}{2x^3-5x^2+3x-1}$ est une fonction rationnelle.

3) Fonctions irrationnelles :

Une fonction irrationnelle est une fonction dont l'expression contient une racine .

A titre d'exemple $f(x)=\dfrac{3x^2+\sqrt{x-3}}{2x-1}$ est une fonction irrationnelle.

4) Fonctions trigonométrique :

Une fonction trigonométrique est une fonction dont l'expression contient l'une au moins des fonctions $\cos$ ou $\sin$ ou $\tan$.

A titre d'exemple $f(x)=3\cos(2x-3)-\tan x$ est une fonction trigonométrique

5) Définition générale d'une fonction :

Toute expression $f(x)$ qui varie en fonction d'une variable réelle x appelée fonction de variable réelle x .

6) Remarque :

Les exemples précédent ne constitue qu'une partie presque négligeable devant l'ensemble de toutes les fonctions numériques .

II. Concepts en relation avec les fonctions:

1) Image et antécédent :

Soit la fonction f telle que $f(x)=3x^2+x-3$

On a $f(-2)=12-2-3$ d'où $f(-2)=7$

On dit que le nombre 7 est l'image de -2 , et que le nombre -2 est l'antécédent de 7 par f .

2) Domaine de définition :

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble de nombres réels qui possèdent une image par cette fonction .
Le domaine de définition de la fonction f est noté D_f .

Soit par exemple la fonction f telle que $f(x)=\dfrac{5x-10}{x^2+x-2}$

Après calcul, on trouve $f(3)=\dfrac{1}{2}$ et $f(0)=5$ et $f(-1)=\dfrac{15}{2}$ ،donc les nombres 3 et 0 et -1 ont chacun une image par f ،donc ils appartient à D_f .

Mais si on essaye de calculer l'image de 1 ,on trouve $f(1)=\dfrac{-5}{0}$ وهذا غير ممكن، ce qui n'a pas de sens donc 1 n'a pas d'image par f ، donc 1 n'appartient pas à D_f مجموعة تعريف الدالة f .
Pour déterminer le domaine de définition de cette fonction, on écrit:

$$D_f=\{x\in IR / x^2+x-2\neq 0\}$$

Après la résolution de l'équation : $x^2+x-2=0$ on trouve:

$$x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0$$

D'où : $D_f=IR-\{-2\ ;\ 1\}$, en utilisant les intervalles : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$

Considérons maintenant la fonction g telle que : $g(x)=\dfrac{5x-10}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Pour déterminer le domaine de définition de cette fonction, on écrit:

$$Dg=\{x\in IR / x^2+x-2>0\}$$

Après la résolution de l'équation : $x^2+x-2=0$ on trouve:

$$x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0$$

D'le tableau de signes du polynôme : $P(x)=x^2+x-2$

x	$-\infty$		-2		1		$-\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

On en déduit : $D_g=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Détermination du domaine de définition:

Engénéral, au moins pour les fonctions habituelles , c'est la forme de l'expression de f qui détermine son domaine de définition D_f :

- **Si $f(x)$ s'écrit sous forme de rapport : $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$**

  alors $D_f=\{x\in IR / Q(x)\neq 0\}$

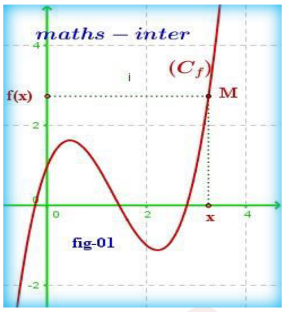
  Dans ce cas la détermination de D_f dépend des solutions de l'équation : $Q(x)=0$.
- **Si $f(x)$ s'écrit sous forme de rapport : $f(x)=P(x)+\sqrt{Q(x)}$**
  alors $D_f=\{x\in IR / Q(x)>0\}$
  Dans ce cas la détermination de D_f dépend des solutions de l'équation : $Q(x)>0$.

3) La représentation graphique d'une fonction :

La représentation graphique ou courbe d'une fonction f, dans un repère $(O,\ \vec{i},\vec{j})$.

est l'ensemble noté (C_f), des points $M(x;f(x))$ tel que , $x\in D_f$.
On peut écrire : $(C_f)=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

Par exemple la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.



III. Fonction paire –fonction impaire –fonction périodique:

1) Fonction paire :

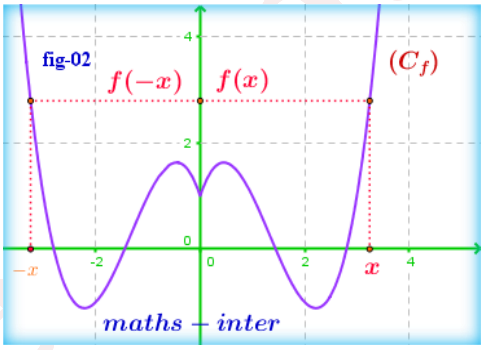
- **Définition:**

Une fonction f est paire si et seulement si :
Quel que soit $x\in D_f$, alors :

$-x\in D_f$ et $f(-x)=f(x)$

- **Propriété:**

Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



2) Fonction impaire :

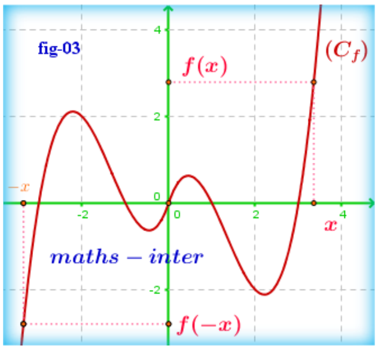
- **Définition:**

Une fonction f est impaire si et seulement si :
Quel que soit $x\in D_f$, alors :

$-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$

- **Propriété:**

Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.



3) Fonction périodique :

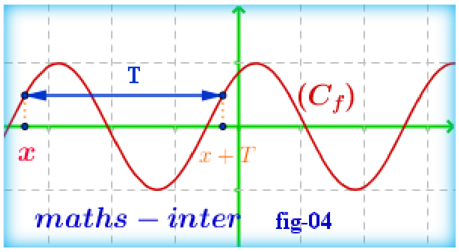
- **Définition:**

Une fonction f est périodique de période T si et seulement si , quel que soit $x\in D_f$, alors :

$x+T\in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$

- **Propriété:**

Une fonction f est périodique de période T si et seulement si sa courbe est exactement la même sur tout intervalle de longueur T.



4) Application :

On considère les fonctions f ; g et h telle que :

$f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2-4}$; $g(x)=\dfrac{3x^3-4x}{x^2+2}$ et $h(x)=5\cos(4x)-1$

a) Déterminer D_f ; D_g et D_h.

b) Etudier la parité de chacune des fonctions f ; g et h.

c) Montrer que h est périodique de période $T=\dfrac{\pi}{2}$.

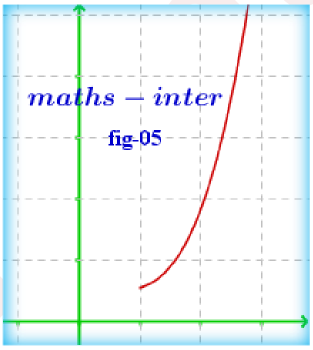
IV. Variations d'une fonction:

1) Fonction croissante :

- **Définition :**

f est croissante sur l'intervalle I , signifie que , quels que soient $x\in I$ et $y\in I$.

Si $x<y$ alors $f(x)<f(y)$



- **Propriété:**

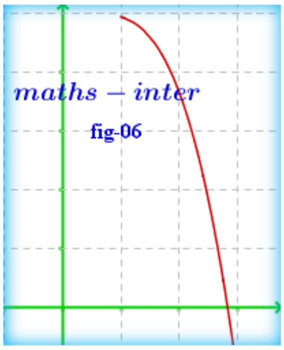
f est croissante sur l'intervalle I , signifie que , quels que soient $x\in I$; $y\in I$ et $x\neq y$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

2) Fonction décroissante :

- **Définition :**

f est décroissante sur l'intervalle I , signifie que , quels que soient $x\in I$ et $y\in I$.

Si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$



- **Propriété:**

f est décroissante sur l'intervalle I , signifie que , quels que soient $x\in I$; $y\in I$ et $x\neq y$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$

3) Propriétés:

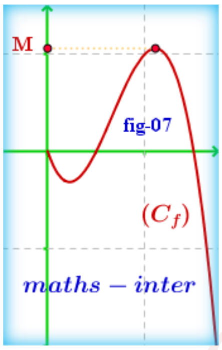
- Si les fonctions f et g sont croissantes sur I et $\alpha\in IR_+^*$ et $\beta\in IR_-^*$, alors:
  - $f+g$ est croissante su I ; $\alpha\times f$ est croissante su I et $\beta\times f$ est décroissante su I .
- Si les fonctions f et g sont décroissantes sur I et $\alpha\in IR_+^*$ et $\beta\in IR_-^*$, alors:
  - $f+g$ est décroissante su I ; $\alpha\times f$ est décroissante su I et $\beta\times f$ est croissante su I .
- Si les fonctions f et g sont croissantes et strictement positives sur I , alors:
  - $f\times g$ est croissante su I ; $\dfrac{1}{f}$ est décroissante su I .

V. Fonction majorée – fonction minorée:

1) Fonction majorée –valeur maximale :

- **Fonction majorée :**

f est majorée par le nombre M sur l'intervalle I , signifie que ,quels que soient $x \in I$; $f(x) \leq M$



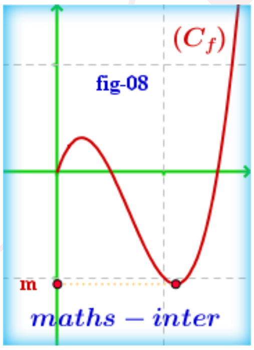
- **Valeur maximale:**

M est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I , signifie que ,f est majorée par M et qu'il existe un élément a de I tel que : $f(a) = M$

2) Fonction majorée –valeur maximale :

- **Fonction minorée :**

f est minorée par le nombre m sur l'intervalle I , signifie que ,quels que soient $x \in I$; $m \leq f(x)$



- **Valeur minimale:**

m est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I , signifie que ,f est minorée par m et qu'il existe un élément a de I tel que : $f(a) = M$

VI. Fonction composée:

1) Définition :

f et g sont deux fonctions numériques , on appelle fonction composée de f suivie de g , la fonction numérique notée gof "on lit g rond f " **et définie par l'expression : $gof(x) = g(f(x))$**

2) Exemple :

f et g sont définies par : $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{2x-4}$

L'expression de la fonction gof est : $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{2f(x)-4} = \sqrt{2\left(\dfrac{5x-3}{x+1}\right)-4} = \sqrt{\dfrac{6x-10}{x+1}}$

L'expression de la fonction fog est : $fog(x) = f(g(x)) == \dfrac{5g(x)-3}{g(x)+1} = \dfrac{5\sqrt{2x-4}-3}{\sqrt{2x-4}+1}$

3) Remarque :

D'après l'exemple précédent On voit clairement que les fonctions gof et fog sont différentes.

4) Théoème :

On démontre que la fonction composée gof est croissante si et seulement si les deux fonctions **f et g** ont le même sens de variations c'est-à-dire si elles sont ou toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes. Et que la fonction composée gof est décroissante si et seulement si les deux fonctions **f et g** n'ont pas le même sens de variations c'est-à-dire si l'une est croissante et l'autre est décroissante.

Bonne Chance