

I. Introduction générale:

Les fonctions usuelles sont des fonctions simples et typiques dont les propriétés géométriques dépendent de leur formes et des leurs paramètres . Dans ce cours nous allons voir quelques unes de ces fonctions , nous citons les fonctions affines , les fonctions polynômes de second degré , les fonctions homographiques, quelques fonctions irrationnelles simples et les fonctions trigonométriques de base.

Pour chacune de ces fonctions f ; on pose : $T_f = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ tels que x et y deux éléments différents du domaine de définition D_f de f .

On désigne par (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

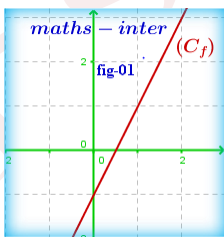
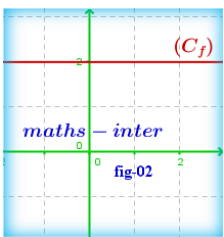
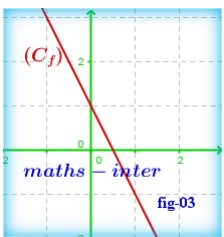
II. La fonction Affine : Cette fonction s'écrit : $f(x) = ax + b$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(ax + b) - (ay + b)}{x - y} = \frac{ax + b - ay - b}{x - y} = \frac{a(x - y)}{x - y} = a$$

Les variations de f dépendent de a , coefficient de la fonction def , d'où le résumé suivant :

<p style="text-align: center;">Tableau de Variations De La fonction f</p> <p style="text-align: center;">Exemple De Représentation graphique</p>	<p>$a > 0$ $T_f > 0$</p> <p>f croissante sur \mathbb{R}</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20%;">x</td> <td style="width: 40%;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">↗</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$f(x) = 2x - 1$ $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$</p> 	x	$-\infty$	$+\infty$	f(x)	↗		<p>$a = 0$ $T_f = 0$</p> <p>f constante sur \mathbb{R}</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20%;">x</td> <td style="width: 40%;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">→</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$f(x) = 0x + 2$ $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$</p> 	x	$-\infty$	$+\infty$	f(x)	→		<p>$a < 0$ $T_f < 0$</p> <p>f décroissante sur \mathbb{R}</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20%;">x</td> <td style="width: 40%;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">↘</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$f(x) = -2x + 1$ $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$</p> 	x	$-\infty$	$+\infty$	f(x)	↘	
	x	$-\infty$	$+\infty$																		
	f(x)	↗																			
	x	$-\infty$	$+\infty$																		
f(x)	→																				
x	$-\infty$	$+\infty$																			
f(x)	↘																				

III. Fonction polynôme de second degré : la fonction s'écrit : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(ax^2 + bx + c) - (ay^2 + by + c)}{x - y} = \frac{a(x^2 - y^2) + b(x - y)}{x - y} = a(x + y) + b$$

d'où : $T_f = a(x + y) + b = a\left(x + y + \frac{b}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(y + \frac{b}{2a}\right)\right]$

On en déduit que l'expression $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(y + \frac{b}{2a}\right)\right]$ est négative sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}[$ et positive sur $]-\frac{b}{2a}; +\infty[$

Les variations de f dépendent de a , d'où le résumé suivant :

Tableau de Variations De La fonction f

$a > 0$

$$T_f < 0 \text{ sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty [$$

$$T_f > 0 \text{ sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty [$$

D'où le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

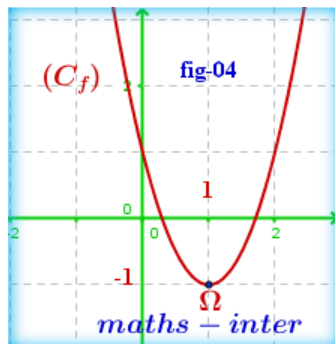
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f(-\frac{b}{2a})$	

(C_f) est une parabole de sommet $\Omega(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$

et orientée vers le haut

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

$f(1) = -1$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 7$



$a < 0$

$$T_f < 0 \text{ sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty [$$

$$T_f > 0 \text{ sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty [$$

D'où le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

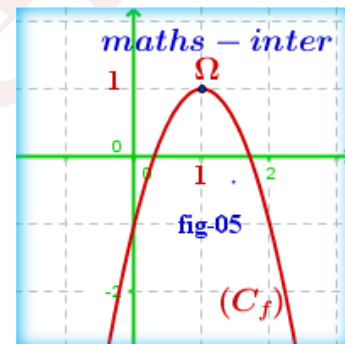
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f(-\frac{b}{2a})$	

(C_f) est une parabole de sommet $\Omega(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$

et orientée vers le bas

$f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

$f(1) = -1$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 7$



Exemple De Représentation graphique

IV. Fonction homographique : la fonction s'écrit : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $\Delta = ad - bc \neq 0$

On a $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\} =]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty [$

Le taux d'accroissement est : $T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d}}{x-y}$

Après simplifications de calcul, on trouve : $T_f = \frac{ad - bc}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{\Delta}{(cx+d)(cy+d)}$

L'expression $(cx+d)(cy+d)$ est positive sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ et $]-\frac{d}{c}; +\infty [$

D'où les variations de f dépendent de $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Donc si $\Delta > 0$, alors f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ et $]-\frac{d}{c}; +\infty [$

et si $\Delta < 0$, alors f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ et $]-\frac{d}{c}; +\infty [$

d'où le résumé :

Tableau de Variations De La fonction f

Exemple De Représentation graphique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$$

$T_f > 0$ sur les deux intervalles:

$$\left] -\infty; -\frac{d}{c} \right[\text{ et } \left] -\frac{d}{c}; +\infty \right[$$

D'où le tableau de variations de f sur IR

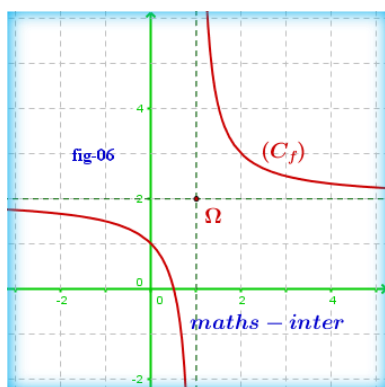
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↗		↗

(C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$

Et d'asymptôtes: $(\Delta_1): x = -\frac{d}{c}$ et $(\Delta_2): y = \frac{a}{c}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$f(3) = 5/2$ et $f(2) = 3$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 3/2$



$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$$

$T_f < 0$ sur les deux intervalles:

$$\left] -\infty; -\frac{d}{c} \right[\text{ et } \left] -\frac{d}{c}; +\infty \right[$$

D'où le tableau de variations de f sur IR

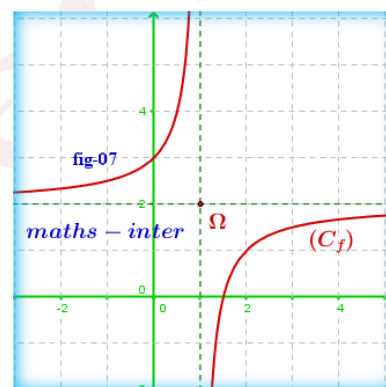
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↘		↘

(C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$

Et d'asymptôtes: $(\Delta_1): x = -\frac{d}{c}$ et $(\Delta_2): y = \frac{a}{c}$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

$f(3) = 3/2$ et $f(2) = 1$ et $f(0) = 3$ et $f(-1) = 5/2$



V. La fonction polynôme de 3^{ème} degré ax^3 : f s'écrit : $f(x) = ax^3$ a $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{ax^3 - ay^3}{x - y} = \frac{a(x^3 - y^3)}{x - y} = \frac{a(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y}$$

d'où : $T_f = a(x^2 + xy + y^2)$

On en déduit que l'expression $x^2 + xy + y^2$ est positive sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Les variations de f dépendent de a, d'où le résumé suivant :

Tableau de Variations De

a > 0

$T_f > 0$ sur IR

D'où le tableau de variations de f sur IR

x	$-\infty$	0	$+\infty$
---	-----------	---	-----------

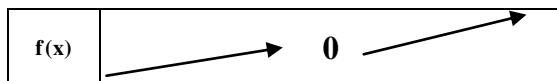
a < 0

$T_f > 0$ sur IR

على f و منه جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
---	-----------	---	-----------

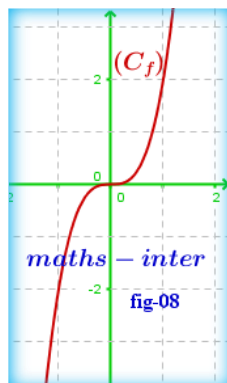
La fonction f



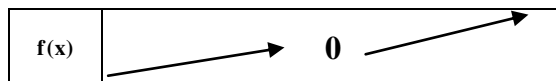
On remarque que (C_f) est symétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

$$f(x) = 2x^3$$

$$f(1) = 2 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f(-1) = -2$$



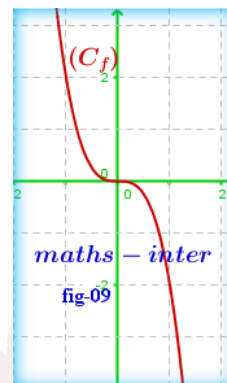
Exemple De Représentation graphique



On remarque que (C_f) est symétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

$$f(x) = -2x^3$$

$$f(1) = -2 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f(-1) = 2$$



VI. Fonctions irrationnelles simples : $\pm\sqrt{x-a}$ et $\pm\sqrt{a-x}$:

1) Considérons les fonctions : $f_1(x) = \sqrt{x-a}$ et $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$

On a $D_{f_1} = D_{f_2} = [a; +\infty[$

Le taux d'accroissement de f_1 est:

$$T_{f_1} = \frac{f_1(x) - f_1(y)}{x - y} = \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{y-a}}{x - y} = \frac{(x-y)}{(x-y)(\sqrt{x-a} + \sqrt{y-a})} = \frac{1}{\sqrt{x-a} + \sqrt{y-a}} > 0$$

d'où :

f_1 est croissante sur $[a; +\infty[$, et puisque $f_2(x) = -f_1(x)$ alors f_2 est décroissante sur $[a; +\infty[$

2) Considérons les fonctions : $g_1(x) = \sqrt{a-x}$ et $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

On a $D_{g_1} = D_{g_2} =]-\infty; a]$

Le taux d'accroissement de g_1 est:

$$T_{g_1} = \frac{g_1(x) - g_1(y)}{x - y} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a-y}}{x - y} = \frac{-(x-y)}{(x-y)(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-y})} = \frac{-1}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a-y}} < 0$$

d'où :

g_1 est décroissante sur $]-\infty; a]$, et puisque $g_2(x) = -g_1(x)$ alors g_2 est croissante sur $]-\infty; a]$

D'où le résumé suivant :

$$f_1(x) = \sqrt{x-a} \text{ et } f_2(x) = -\sqrt{x-a}$$

Le tableau de variations de f_1 sur $[a; +\infty[$

X	a	$+\infty$
$f_1(x)$		↗

Le tableau de variations de f_2 sur $[a; +\infty[$

$$g_1(x) = \sqrt{a-x} \text{ et } g_2(x) = -\sqrt{a-x}$$

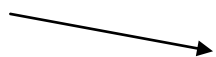
Le tableau de variations de g_1 sur $]a; +\infty[$

X	$-\infty$	a
$g_1(x)$		↘

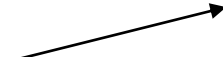
Le tableau de variations de g_2 sur $]a; +\infty[$

Tableau de Variations

De La fonction f

x	a	$+\infty$
$f_2(x)$		

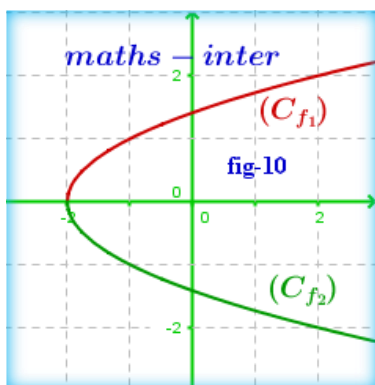
On remarque $(C_{f_1}) \cup (C_{f_2})$ est une parabole
 sommet $A(a; 0)$
 D'axe (Ox) et orientée vers la droite

x	$-\infty$	a
$g_2(x)$		

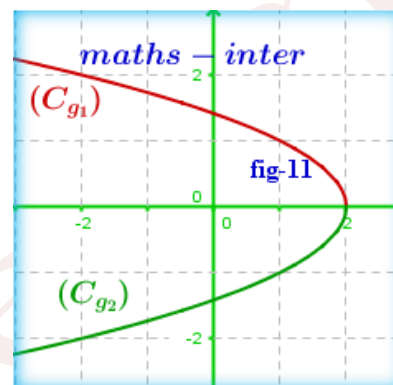
On remarque $(C_{g_1}) \cup (C_{g_2})$ est une parabole
 sommet $A(a; 0)$
 D'axe (Ox) et orientée vers la gauche

Exemple De Représentation graphique

$f_1(x) = \sqrt{x-a}$ et $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$
 $f(1)=2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=-2$



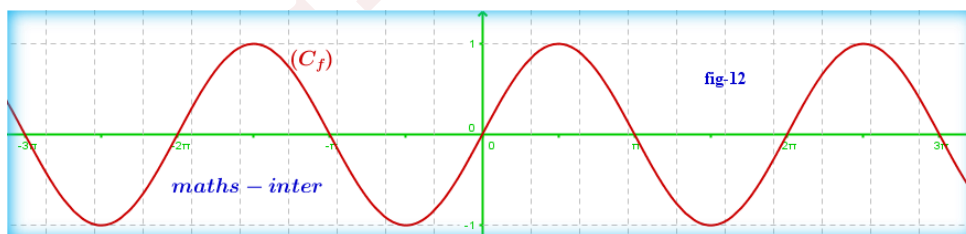
$g_1(x) = \sqrt{a-x}$ et $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$
 $f(1)=-2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=2$



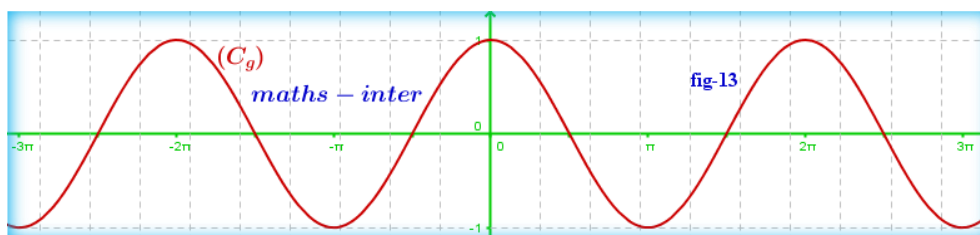
VII. Les fonctions trigonométriques :

Considérons les fonctions f ; g et h tels que : $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$ et $h(x) = \tan x$
 Les courbes de ces fonctions sont tracées, en se basant sur le cercle trigonométrique :

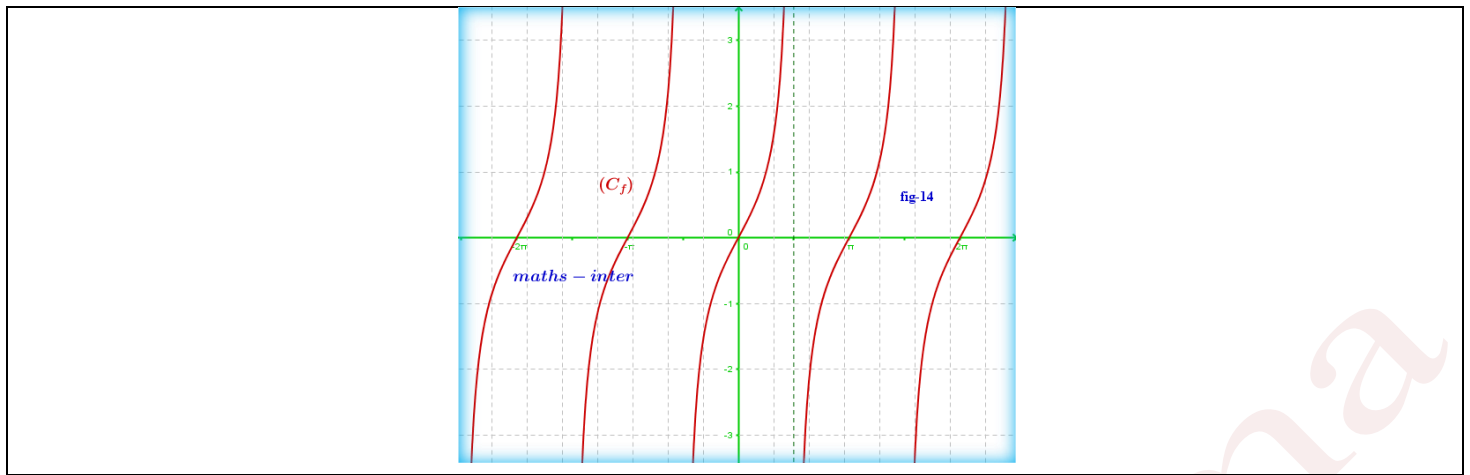
$f(x) = \sin x$



$g(x) = \cos x$



$h(x) = \tan x$



Bonne Chance