

Exercice .1

Maths-inter.ma

1.

Soit la suite (U_n) :
$$\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$$

- 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \neq 5$.
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 5 \leq U_n \leq 11$.
- 3) Etudier la monotonie de (U_n) .
- 4) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \frac{1}{U_n - 5}$.

- a) Montrer que (V_n) est une suite Arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
- b) Déterminer V_n en fonction de n .
- c) Déterminer U_n en fonction de V_n , en déduire U_n en fonction de n .

5) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{U_k - 5}$.

Calculer S_n en fonction de n .

Exercice .2

Maths-inter.ma

2.

Soit la suite (U_n) :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 4} \end{cases}$$

- 1) Calculer U_2, U_1 .
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < U_n < 3$.
- 3) Etudier la monotonie de (U_n) .
- 4) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

- b) Déterminer V_n en fonction de n .
- c) Déterminer U_n en fonction de V_n , en déduire U_n en fonction de n .

5) On pose : $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{3}{U_k + 2}$.

- a) Calculer G_n en fonction de n .
- b) Vérifier que : $\frac{3}{U_n + 2} = 1 - V_n$.
- c) En déduire S_n en fonction de n .

Exercice .3

Maths-inter.ma

3.

- 1) Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$$

- a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 - U_{n+1} = \frac{4}{U_n + 3} (2 - U_n)$.
- b) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < U_n < 2$.

- 2) En déduire que (U_n) est croissante.

3) Soit la suite numérique (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
- b) Calculer V_n en fonction de n , en déduire U_n en fonction de n .

4) Calculer $S_n = \frac{4^0}{4^0 + 5^0} + \frac{4^1}{4^1 + 5^1} + \frac{4^2}{4^2 + 5^2} + \dots + \frac{4^p}{4^p + 5^p} + \dots + \frac{4^n}{4^n + 5^n}$,

Exercice .4

Maths-inter.ma

4.

- 1) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{5U_n}{2U_n + 3}$$

- a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < 1$.
- b) Montrer que (U_n) est strictement croissante.

- 2) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$.

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

- c) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 1 - U_n < \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Exercice .5

Maths-inter.ma

5.

On considère la suite (U_n) , telle que :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{3 + \sqrt{U_n}} \end{cases}$$

- 1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n$.
- 2) Etudier les variations de la suite (U_n) , en déduire qu'elle est convergente.

- 3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_{n+1} < \frac{2}{3} U_n$

- 4) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- 5) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Bonne Chance