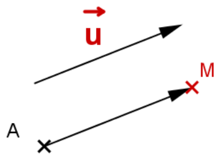
I. Rappels:

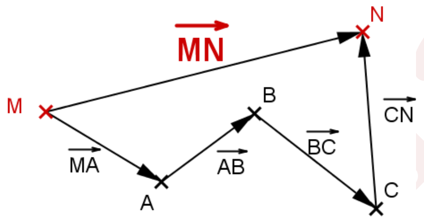
1) Propriété :1

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$ **et le point** A ,
Il existe un point unique M vérifiant : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$



2) Relation de schasles :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$



II. Propriété de base:

Propriété et définition 3 :

Quels que soient les points A ; B ; C ; ... ; E
et quels que soient les réels a ; b ; c ; ... ; e tel que $a+b+c+d+ \dots +e \neq 0$;
il existe un point unique G vérifiant la relation suivante:

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

Le point G **vérifiant la relation précédente est appelé le barycentre du systéme pondéré :**

$$\{(A,a);(B,b);(C,c); \dots ;(E,e)\}$$

Remarque : **Si les nombres** a ; b ; c ; ... ; e sont égaux, alors G est appelé centre de gravité du polygone $ABCD....E$.

Démonstration:

Soit O est un point fixe ; en appliquant la relation de Chasles:

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

On trouve:

$$a.(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) + \dots + e.(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE}) = \vec{0}$$

$$(a+b+\dots e).\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + \dots + e.\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+\dots e}(a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + \dots + e.\overrightarrow{OE})$$

On pose $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \dots + \overrightarrow{OE} = \vec{u}$ la relation devient: $\overrightarrow{OG} = \vec{u}$ On déduit d'après la propriété 1, que le point G existe et il est unique.

III. Propriété générale:

Propriété d'homogénéité :

Soit G **le barycentre du système :**
$\{(A,a);(B,b);(C,c); \dots ;(E,e)\}$
Alors G est **le barycentre du système :**
$\{(A,ka);(B,kb);(C,kc); \dots ;(E,ke)\}$
Quel que soit le réel non nul k .

Démonstration : **la propriété est vraie d'après l'équivalence suivante:**

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

$$\Downarrow \Uparrow$$

$$ka.\overrightarrow{AG} + kb.\overrightarrow{BG} + kc.\overrightarrow{CG} + kd.\overrightarrow{DG} + \dots + ke.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

Associativité du barycentre :

Si G_1 **est le barycentre du système :**
$\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);(A_3,a_3); \dots ;(A_p,a_p)\}$
Si G_2 **est le barycentre du système :**
$\{(B_1,b_1);(B_2,b_2);(B_3,b_3); \dots ;(B_p,b_p)\}$
Alors **le barycentre** G **du système** :

$$\left\{\begin{matrix}(A_1,a_1);(A_2,a_2);(A_3,a_3); \dots ;(A_p,a_p); \\ (B_1,b_1);(B_2,b_2);(B_3,b_3); \dots ;(B_p,b_p)\end{matrix}\right\}$$

est lui-même le barycentre **du système** :
$\{(G_1,(a_1+ \dots +a_p)) ; (G_2,(b_1+ \dots +b_p))\}$

Démonstration : **On a succéssivement d'après ce qui précéde:**

$$(1):\ (a_1+a_2+...+a_p)\overrightarrow{GG_1}=a_1.\overrightarrow{GA_1}+a_2.\overrightarrow{GA_2}+...+a_p.\overrightarrow{GA_p}$$

$$(2):\ (b_1+b_2+...+b_p)\overrightarrow{GG_2}=b_1.\overrightarrow{GB_1}+b_2.\overrightarrow{GB_2}+...+b_n.\overrightarrow{GB_n}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient:

$$(a_1+...+a_p)\overrightarrow{GG_1}+(b_1+...+b_p)\overrightarrow{GG_2}=a_1.\overrightarrow{GA_1}+...+a_p.\overrightarrow{GA_p}+b_1.\overrightarrow{GB_1}+...+b_n.\overrightarrow{GB_n}=\vec{0}$$

CQFD.

IV. Barycentre de deux points:

1) Définition :4

A et B deux points .
a et b deux réels tel que $a+b\neq 0$
Il existe un point unique G vérifiant la relation suivante: $\mathbf{a.\overrightarrow{AG}+b.\overrightarrow{BG}=\vec{0}}$

Le point G **est le barycentre d système** $\{(A,a)\,;(B,b)\}$

2) Remarque :

si $a=b$, alors G est le milieu de $[AB]$.

3) Relations Barycentriques:

Quel que soit le point O :

$$\mathbf{(1):\ \overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b}(a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB})}$$

En particulier si O est confondu avec A :

$$\mathbf{(2):\ \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$$

4) Conséquences :

:la relation précédente montre que le barycentre de deux points est aligné avec ces deux points.

5) Construction du Barycentre:

Pour construire le barycentre G , on utilise la relation (2)

Exemple : : le barycentre des point $(A,-3)$ و $(B,2)$ est le point G telle que : $\mathbf{\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}}$:

V. Barycentre de trois points:

1) Définition :4

A ; **B** et **C** deux points .
a ; **b** et **c** trois réels tel que $a+b+c\neq 0$
Il existe un point unique G vérifiant la relation suivante: $\mathbf{a.\overrightarrow{AG}+b.\overrightarrow{BG}+c.\overrightarrow{CG}=\vec{0}}$
Le point G **est le barycentre d système** $\{(A,a)\,;(B,b)\,;(C,c)\}$

2) Remarque :

si $a=b=c$, alors G est le centre de gravité du triangle ABC, G est l'intersection des médianes du triangle ABC.

3) Relations Barycentriques:

Quel que soit le point O :

$$\mathbf{(1):\ \overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b+C}(a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC})}$$

Soit $\mathbf{A'}$ le milieu de $[\mathbf{BC}]$, d'après l'associativité du barycentre, on obtient :

$$\mathbf{(2):\ \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}}$$

VI. Coordonnées du Barycentre:

1) Cas de deux points:

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le point G **est le barycentre du système :**

$$\{(A,a);(B,b)\}$$

On a: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b}(a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB})$

D'où les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{a+b}(ax_A + bx_B) \\ x_G = \frac{1}{a+b}(ax_A + bx_B) \end{cases}$$

2) Cas de trois points:

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le point G **est le barycentre du système :**

$$\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$$

On a: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c}(a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC})$

D'où les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{a+b+c}(ax_A + bx_B + cx_C) \\ x_G = \frac{1}{a+b+c}(ax_A + bx_B + cx_C) \end{cases}$$

Bonne Chance