

I. Les déterminants et ses applications

1) Déterminants :

Déterminant d'ordre 2	Déterminant d'ordre 3
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$	$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & h \\ f & k \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & g \\ f & k \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$

2) Propriétés

- ✓ Les vecteurs \vec{U} et \vec{V} et \vec{W} sont coplanaires si et seulement si , il existe deux réels α et β tels que : $\vec{W} = \alpha \cdot \vec{U} + \beta \cdot \vec{V}$.
- ✓ Les vecteurs \vec{U} et \vec{V} et \vec{W} sont coplanaires si et seulement si : $\det(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = 0$.

Exercice :1

a) Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} ; \quad D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} ; \quad C = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} ; \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} ; \quad A = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires $\vec{W}(1,5,4)$; $\vec{V}(-2,2,3)$; $\vec{U}(5,3,2)$?

c) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires $\vec{S}(2,0,7)$; $\vec{R}(-1,1,0)$; $\vec{T}(1,1,7)$?

3) L'équation cartésienne et la représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :

Exercice :2

Dans un repère orthonormée, on considère les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{U} = \vec{AB}$ et $\vec{V} = \vec{AC}$.
- b) Montrer que les points A et B et C définissent un plan.
- c) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) .
- d) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice :3

1) Soit le plan définie par : (P) :
$$\begin{cases} x = 2k + k' - 1 \\ y = -k + 2k' + 2 \\ z = 3k - k' - 3 \end{cases} ; \quad (k \in \mathbb{R} ; k' \in \mathbb{R})$$

- a) Déterminer les coordonnées de \vec{U} et \vec{V} vecteurs directeurs de (P) .
- b) Donner trois A et B et C du plan (P) .
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) .

2) soit (Γ) le plan dont l'équation cartésienne est (Γ) : $x - y - z + 1 = 0$

- a) montrer que $A(0,0,1)$; $B(1,1,1)$; $C(2,1,2)$ appartient au plan (Γ) .
- b) Déterminer une représentation paramétrique de (Γ) .

II. Le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace

Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{U}(a, b, c)$ et $\vec{V}(a', b', c')$.

	Produit Scalaire	Produit vectoriel
Définition	<p>Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}(a, b, c)$ et $\vec{V}(a', b', c')$ est le nombre réel noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tel que :</p> $\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'$	<p>Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}(a, b, c)$ et $\vec{V}(a', b', c')$ est le vecteur noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que :</p> $\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = (bc' - cb') \cdot \vec{i} - (ac' - ca') \cdot \vec{j} + (ab' - ba') \cdot \vec{k}$
Remarques	$\vec{U} \cdot \vec{V} = \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ \times \cos(\widehat{U, V})$ $\ \vec{U}\ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	<p>le produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires \vec{U} et \vec{V} est le vecteur \vec{W} perpendiculaire au plan de vecteurs directeurs \vec{U} et \vec{V}, dont le sens est définie par la règle de la main droite et dont la norme est : $\ \vec{U} \wedge \vec{V}\ = \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ \times \sin(\widehat{U, V})$</p>
Propriétés	$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$	$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{U}$ et \vec{V} colinéaires $\Leftrightarrow \vec{V} = k\vec{U}$

Exercice :4

Dans un repère orthonormée, on considère les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; E \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} ; F \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} et \vec{EF} et \vec{AE} .
- Calculer les distances AB et EF .
- Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- Montrer que les droites (AB) et (EF) sont perpendiculaires.
- Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AE}$ en déduire que les points A et B et E sont non alignés
- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE) .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par et perpendiculaire au plan (ABE) .

III. Calcul de distances – surface d'un triangle

Propriété

figure

Distance entre deux points :

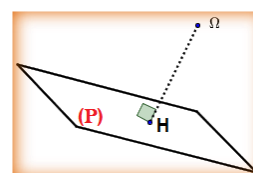
$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Distance entre un point et un plan :

$\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et $(P) : ax + by + cz + d = 0$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

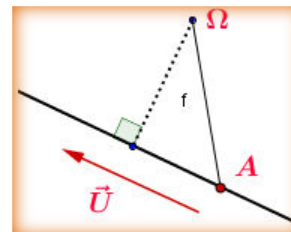


Distance entre un point et une droite :

Ω un point de l'espace
 et (Δ) une droite passant par A et de vecteur

directeur \vec{U}

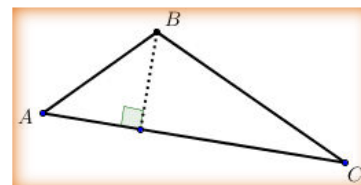
$$d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$$



Aire d'un triangle ABC

Soit S l'aire du triangle ABC on a :

$$S = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$



Exercice :5

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

Soient les points A(2,-1,1) ; B(1,1,1) ; C(2,1,-3)

- 1) Calculer les distances AB et AC et BC
- 2) Soit (P) le plan dont l'équation cartésienne est (P): $2x - y - 3z + 2 = 0$
 Calculer les distances : $d(A, (P))$ et $d(B, (P))$ et $d(C, (P))$
- 3) Soit (Δ) la droite qui passe par le point E(-1,2,1) et de vecteur directeur $\vec{U} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
 Calculer les distances $d(A, (\Delta))$ et $d(B, (\Delta))$ et $d(C, (\Delta))$
- 4) Calculer la surface du triangle ABC

IV. La sphère

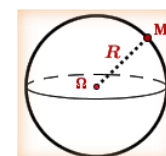
1) Equation de la sphère

figure

Sphère définie par son centre et son rayon

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R

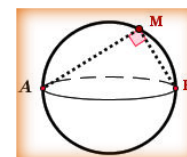
$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$



Sphère définie par un diamètre

Soit (S) la sphère de diamètre [AB]

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$



Exercice :6

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

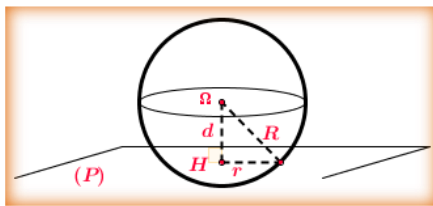
Soient les points A(1,-1,2) ; B(2,-3,0) ; $\Omega(0,-1,2)$

- 1) Déterminer l'équation de la sphère (S_1) de centre Ω et de rayon $R = 2\sqrt{3}$.
- 2) Déterminer l'équation de la sphère (S_2) de diamètre [AB].
- 3) Soit (Γ_1) l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 13 = 0$
 Montrer que (Γ_1) est une sphère et déterminer son centre et son rayon.
- 4) Soit (Γ_2) l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 13$
 Montrer que (Γ_2) est une sphère et déterminer son centre et son rayon.

2) Position relative d'un plan et d'une sphère

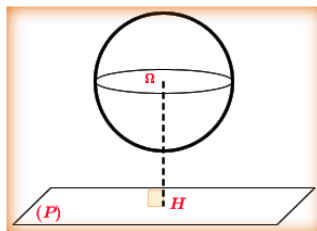
(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan de l'espace

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P)



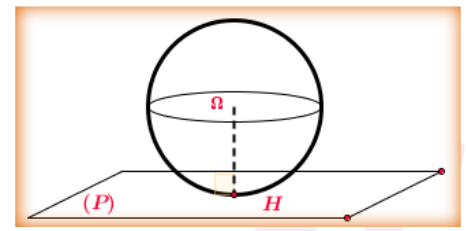
$d < R$

Dans ce cas le plan coupe la sphère suivant un cercle de centre r tel que: $r^2 = R^2 - d^2$



$d > R$

Dans ce cas le plan ne coupe pas la sphère



$d = R$

Dans ce cas le plan est tangent à la sphère en un point H

Exercice :7

(S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,-2)$ et de rayon $R = 1$

Soit (P) le plan d'équation cartésienne : (P): $2x - y - 2z + 2 = 0$

Calculer $d(\Omega, (P))$ en déduire la position relative entre le plan (P) et la sphère (S).

Exercice :8

(S) est la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

et (P) le plan d'équation cartésienne : (P): $2x - y - 2z + 5 = 0$

- Déterminer Ω le centre de la sphère (S) et de rayon R .
- Montrer que (P) est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées du point d'intersection H.

Exercice :9

(S) est la sphère de centre $\Omega(1,1,-1)$ et de rayon $R = 3$

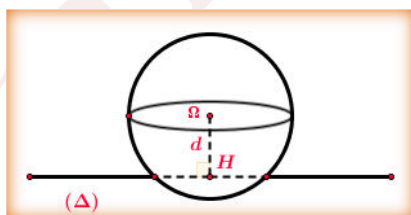
et (P) le plan d'équation cartésienne : (P): $x + y - z = 0$

- Calculer $d(\Omega, (P))$.
- En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) et déterminer son rayon r.
- Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).
- Déterminer les coordonnées H centre du cercle (C).

3) Position relative d'une droite et d'une sphère

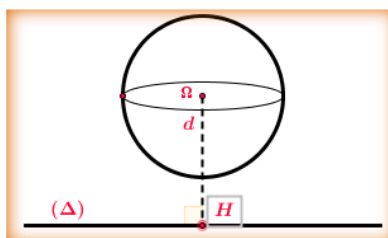
(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) une droite de l'espace

H est la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) et d est la distance entre le point Ω et la droite (Δ)



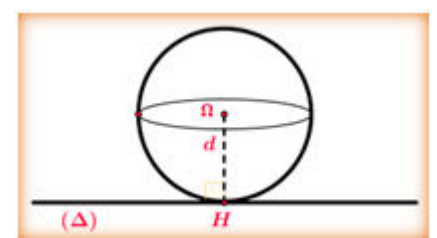
$d < R$

Dans ce cas la droite coupe la sphère en deux points



$d > R$

Dans ce cas la droite ne coupe pas la sphère



$d = R$

Dans ce cas la droite est tangente à la sphère en un point H

Exercice :9

(S) est la sphère de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon $R = 3$

et (Δ) la droite passant par le point $A(0,0,1)$ et de vecteur directeur $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

- 1) Calculer $d(\Omega, (\Delta))$. En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S).
- 2) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ) .
- 3) Déterminer les coordonnées H point d'intersection de (Δ) et de (S).

Bonne Chance