Exercice .1 Maths-inter.ma 1. التمرين

1) Soit r le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 5, $r \in \{0,1,2,3,4\}$. *Déterminer le* reste de la division euclidienne du nombre r^2 par 5.
2) Montrer que quel que soit l'entier naturel n, l'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 *par 5 est* $\{0,1,,4\}$.
3) En déduire par l'absurde que $(\forall p \in IN)\ ;\ \sqrt{5p+12} \notin IN$

Exercice .2 Maths-inter.ma 2. التمرين

Soit $n \in IN^*$, *On pose pour tout* $k \in \{0,1,2,\ \dots\ ,n-1\} = E\ ;\ I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ *; montrer que :*

1) $(\forall k \in E)\ ;\ I_k \subset [0,1[$
2) $(\forall (k,k') \in E^2)\ ;\ (k \neq k') \Rightarrow I_k \cap I_{k'} = \phi$
3) $(\forall (k,k') \in E^2)\ ;\ (k \neq k') \Rightarrow I_k \cap I_{k'} = \phi$

Exercice .3 Maths-inter.ma 3. التمرين

1) *Soit* $n \in IN^*$.
   a) *Montrer que* $:(2n+3)! = (n+1)!\,(n+2)(n+3)\dots(2n+3)$
   b) *Montrer que* $:(n+2)(n+3)\dots(2n+3) \geq (n+2)^{n+2}$
2) *Montrer par récurrence que* $:(\forall n \in IN^*)\ ;\ 1!\ 3!\ 5!\ \dots\ (2n+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$

Exercice .4 Maths-inter.ma 4. التمرين

Soit l'application $f : IR \to IR$ *telle que* $:\left(\forall (x,y) \in IR^2\right) : \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & :(1) \\ f(xy) = f(x)f(y) & :(2) \end{cases}$

1) *Montrer que :* $f(0) = 0$
2) *Montrer que :* $f(1) = 1$ *ou* $f(1) = 0$
3) *On suppose que* $f(1) \neq 0$
   a) *Montrer que :* $(\forall n \in IN)\ ;\ f(n) = n$
   b) *Montrer que :* $(\forall m \in Z)\ ;\ f(m) = m$
   c) *En déduire :* $(\forall r \in Q)\ ;\ f(r) = r$

Bonne Chance