

Exercice .1

Maths-inter.ma

1.

On considère les ensembles non vides E et F et l'application f de E vers F. Soit A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice .2

Maths-inter.ma

2.

Montrer dans chacun des cas suivant que f n'est pas injective.

- a) f est une application de \mathbb{N} vers \mathbb{N} , telle que : $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.
- b) f est une application de \mathbb{N}^2 vers \mathbb{N} , telle que : $f((n, p)) = n + p + 1$.

Exercice .3

Maths-inter.ma

3.

On considère l'application f de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^* , telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Montrer que f est injective et non surjective.

Exercice .4

Maths-inter.ma

4.

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa réciproque dans chacun des cas suivants :

- a) f est une application de $[2, +\infty[$ vers \mathbb{R}^+ telle que : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.
- b) f est une application de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ telle que : $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice .5

Maths-inter.ma

5.

E est un ensemble non vide, pour toute partie A de E, on considère l'application

f_A de E vers $\{0, 1\}$ définie par (on l'appelle fonction caractéristique de A) : $\begin{cases} f_A(x) = 1 & ; x \in A \\ f_A(x) = 0 & ; x \notin A \end{cases}$

Montrer que :

- a) $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$
- b) $f_{\bar{A}} = f_E - f_A$
- c) $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$
- d) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \times B}$

Exercice .6

Maths-inter.ma

6.

On considère l'application f définie de $[1, +\infty[$ vers $[\sqrt{2}, +\infty[$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

- 1) Montrer que : $\forall x \geq 1 ; \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{f(x)}$
- 2) En déduire que f est bijective.

Exercice .7

Maths-inter.ma

7.

On considère l'application f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; x + |f(x) - 1| = 2f(x) - 2$$

- 1) Calculer f(0).
- 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; x(f(x) - 1) \geq 0$
- 3) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \frac{|x|(x+2) - x}{2|x| - x}$
- 4) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Bonne Chance