Exercice .1 Maths-inter.ma **1.**

On pose $E = \left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ .Et on considère l'application f définie de E vers par : $f((x,y)) = (xy, \frac{y}{x})$

1) Montrer que f est injective et surjective.
2) En déduire que l'application f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice .2 Maths-inter.ma **2.**

Soit E un ensemble et f une application de P(E) vers P(E) telle que. :

$$\forall X \in P(E) \ , \ \forall Y \in P(E) \ , \ \begin{cases} f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y) \\ f(X \cap Y) = f(X) \cup f(Y) \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall X \in P(E) \ , \ \forall Y \in P(E) \ , \ X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$
2) On suppose que f est surjective, déterminer $f(E)$; $f(\phi)$
3) On suppose que f est bijective, montrer que : $\forall X \in P(E) \ , \quad f(C_E^X) \subset C_E^{f(X)}$

Exercice .3 Maths-inter.ma **3.**

E est un ensemble non vide, .Pour toute partie A de E, on définit l'application f_A (appelée fonction caractéristique de la partie A) de E vers $\{0,1\}$ telle que pour x de E:

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 \ ; \ x \in A \\ f_A(x) = 0 \ ; \ x \notin A \end{cases}$$

Montrer que pour tout A et B de P(E) :

a) $\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow f_A \leq f_B}$
b) $\mathbf{A = B \Leftrightarrow f_A = f_B}$
c) $\mathbf{f_A^2 = f_A}$
d) $\mathbf{f_{A\cap B} = f_A \times f_B}$
e) $\mathbf{f_{\overline{A}} = 1 - f_A}$
f) $\mathbf{f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_A \times f_B}$
g) $\mathbf{f_{A-B} = f_A(1 - f_B)}$
h) $\mathbf{f_{A\Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \times f_B}$
i) $\mathbf{f_{A\Delta B} = (f_A - f_B)^2 = |f_A - f_B|}$

Exercice .4 Maths-inter.ma **4.**

Soit f l'application de E vers F et g l'application de F vers G .Montrer les deux implications suivantes:

4) **(f injective) $\Rightarrow$ (gof injective)**
5) **(g surjective) $\Rightarrow$ (gof surjective)**

Exercice .5 Maths-inter.ma **5.**

Soient E et F deux ensembles non vide et f une application de E vers F . A est une partie de E et B une partie de F.

a) Montrer que : $\mathbf{A \subset f^{-1}(f(A))}$ et $\mathbf{f(f^{-1}(B)) \subset B}$
b) Montrer que si f est surjective alors $\mathbf{f(f^{-1}(B)) = B}$ quelle que soit la partie B

Exercice .6 Maths-inter.ma **6.**

f est une application de E vers F . soient A et B deux parties de E.

6) Montrer que :

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B$$

7) Montrer que si f est injective , alors $\mathbf{f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)}$

Bonne Chance