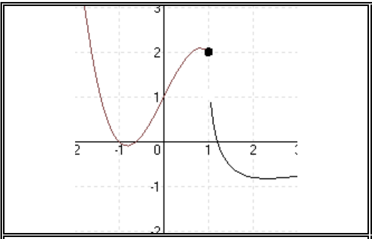
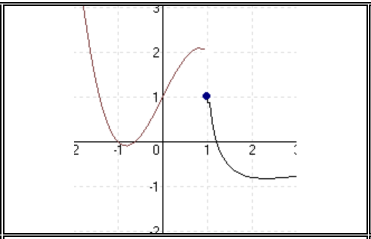
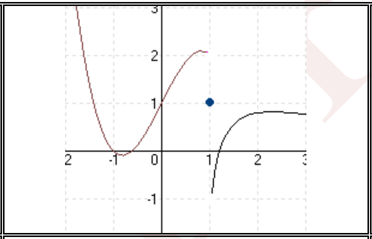
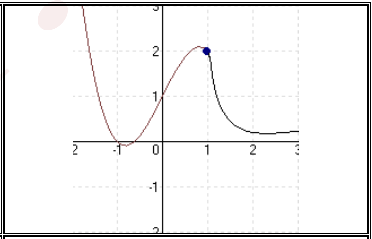
I. Limites

1) Règles de Calcul

Somme	Produit	Rapport
$+\infty+\infty=+\infty$ et $-\infty-\infty=-\infty$	$(a>0).(+\infty)=+\infty$ et $(a<0).(+\infty)=-\infty$	$\frac{1}{0^+}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0^+$
$a+\infty=+\infty$ et $a-\infty=-\infty$ $(a\in IR)$	$(a>0).(-\infty)=-\infty$ et $(a<0).(-\infty)=+\infty$	$\frac{1}{0^-}=-\infty$ et $\frac{1}{-\infty}=0^-$
$+\infty-\infty$ et $-\infty+\infty$ FI	$(\pm\infty)(\pm\infty)=\pm\infty$ et $0.(\pm\infty)$ FI	$\frac{0}{0}=$ FI et $\frac{\infty}{\infty}=$ FI
	Autres règles	
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

2) Interprétations des limites

Les figures suivantes représentent la fonction f dans des situations différentes au voisinage de $x_0=1$

			
D'après la courbe, on a: $f(x_0)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=1$ Observations: • f n'a pas de limite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ • f n'est pas continue à droite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$ • f est continue à gauche en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ • f n'est pas continue au point x_0. Car f n'est pas continue à droite en x_0.	D'après la courbe, on a: $f(x_0)=1$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=1$ Observations: • f n'a pas de limite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ • f est continue à droite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ • f n'est pas continue à gauche en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$ • f n'est pas continue au point x_0. Car f n'est pas continue à gauche en x_0.	D'après la courbe, on a: $f(x_0)=1$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-1$ Observations: • f n'a pas de limite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ • f n' est pas continue à droite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ • f n'est pas continue à gauche en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$ • f n'est pas continue au point x_0. Car f n'est pas continue à gauche en x_0.	D'après la courbe, on a: $f(x_0)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=2$ Observations: • f a une limite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ • f est continue à droite en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ • f est continue à gauche en x_0. car: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ • f est continue au point x_0. Car f est continue à droite et à gauche en x_0.

x_0 متصلة على يمين f $\Downarrow$ $\Uparrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$	x_0 متصلة في f $\Uparrow$ $\Downarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$	x_0 متصلة على يسار f $\Downarrow$ $\Uparrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

II. Continuité sur un intervalle –Fonctions réciproques II.

1) Continuité sur un intervalle

a) تعريف:

نقول أن الدالة f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من هذا المجال .

نقول أن الدالة f متصلة على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومتصلة على يمين a ويسار b .

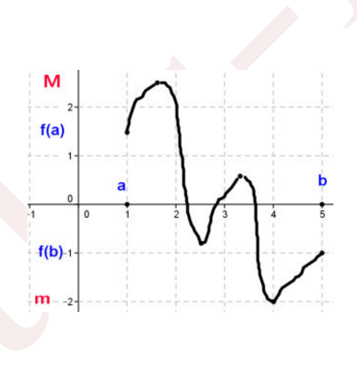
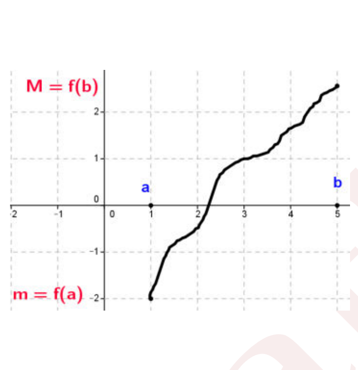
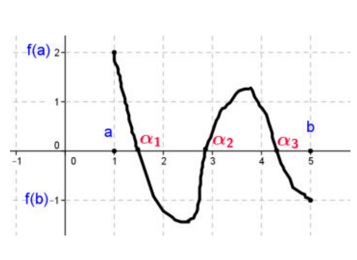
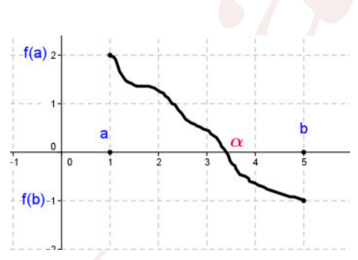
b) خاصيات:

- جميع الدوال الحدودية و الجدرية و اللاجدرية والدوال المثلثية هي دوال متصلة على مجموعة تعريفها.
- مجموع دالتين متصلتين على مجال هي دالة متصلة على هذا المجال .
- جداء دالتين متصلتين على مجال هي دالة متصلة على هذا المجال .
- جداء دالة متصلة على مجال بعدد حقيقي هي دالة متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال حيث أن g لا تنعدم فإن الدالة $\frac{f}{g}$ متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت f دالة متصلة على مجال فإن الدالة $\sqrt{f}$ و $\sqrt[3]{f}$ وبصفة عامة $\sqrt[n]{f}$ هي دالة متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت f متصلة في النقطة x_0 و g متصلة في النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة gof متصلة في النقطة x_0 .

c) مبرهنة القيم الوسطية :

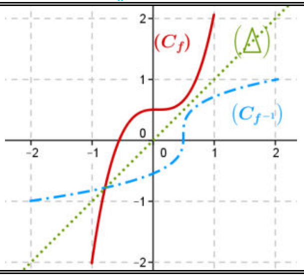
- المبرهنة الأساسية:

- إذا كانت دالة f متصلة على مجال $[a,b]$ ، فإن صورة المجال $[a,b]$ هو مجال مغلق $[m,M]$ بحيث $m=\inf f$ و $M=\sup f$.
- إذا كانت دالة f متصلة وتزايدية قطعاعلى مجال $[a,b]$ ، فإن صورة المجال $[a,b]$ هو المجال المغلق $[f(a),f(b)]$.
- إذا كانت دالة f متصلة وتناقصية قطعاعلى مجال $[a,b]$ ، فإن صورة المجال $[a,b]$ هو المجال المغلق $[f(b),f(a)]$.

مبرهنات :	أشكال :	
إذا كانت دالة f متصلة على مجال $[a,b]$ ، فإن صورة المجال $[a,b]$ هو مجال مغلق $[m,M]$ بحيث $m=\inf f$ و $M=\sup f$. (الشكل1) إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعاعلى مجال $[a,b]$ ، فإن صورة المجال $[a,b]$ هو المجال المغلق $[f(a),f(b)]$ إذا كانت تزايدية (الشكل2) و $[f(b),f(a)]$ إذا كانت تناقصية.		
إذا كانت دالة f متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل ينتمي الى المجال $]a,b[$. إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ينتمي الى المجال $]a,b[$.		

2) Continuité sur un intervalle

a) خاصية عامة :

▪ خاصية :	▪ التمثيل المبياني للدالة العكسية :
إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا من المجال I نحو المجال J فإنها توجد دالة نرمز لها f^{-1} معرفة من المجال J نحو المجال I متصلة ولها نفس رتابة الدالة f وتحقق ما يلي : $(\forall x \in J)(\forall y \in I)\ ;\ f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$. الدالة f^{-1} تسمى الدالة العكسية للدالة f .	
ملاحظة: $(\forall x \in J)(\forall t \in I)\ ;\ fof^{-1}(x)=x\ et\ f^{-1}of(t)=t$	ملاحظة: $(C_{f^{-1}})$ هي مماثلة (C_f) بالنسبة للمنصف الأول و هو المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

b) الجدور النونية :

ليكن n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة f_n المعرفة من IR_+ نحو IR_+ كما يلي : $(\forall x \in IR_+)\ ;\ f_n(x)=x^n$

على سبيل المثال مهما يكن x من IR_+ فإن : $f_2(x)=x^2\ ;\ f_3(x)=x^3\ ;\ f_7(x)=x^7$ ....

مهما يكن n ، فإن الدالة f_n متصلة وتزايدية قطعا من المجال $I=[0,+\infty[$ نحو المجال $J=[0,+\infty[$ ومنه فإنها تقبل دالة عكسية f_n^{-1} معرفة من المجال J نحو المجال I.

مهما يكن $x \in IR_+$ نضع : $f_n^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ ؛ العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجدر النوني للعدد الموجب x . ونرمز له أيضا ب $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$

و هكذا يمكن أن نستنتج ما يلي : $(\forall x \ge 0)(\forall t \ge 0)\ ;\ t=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x=t^n$.

من العبارة السابقة نستنتج ما يلي:

$$(\forall x \ge 0)(\forall t \ge 0)\ ;\ t=\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=t^2$$

$$(\forall x \ge 0)(\forall t \ge 0)\ ;\ t=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=t^3$$

......

$$(\forall x \ge 0)(\forall t \ge 0)\ ;\ t=\sqrt[7]{x}=x^{\frac{1}{7}} \Leftrightarrow x=t^7$$

......

$\sqrt[2]{x}$ أو $\sqrt{x}$: هو الجدر المربع الموجب للعدد x .

$\sqrt[3]{x}$: هو الجدر المكعب الموجب للعدد x .

....

$\sqrt[7]{x}$: هو الجدر الموجب من الرتبة 7 للعدد x .

....

c) خاصيات الجدور النونية :

سبق إن رأينا أن الجدور النونية تكتب على شكل قوة عدد حقيقي موجب أسه عدد كسري .
يمكن أن نبرهن بكامل البساطة وانطلاق من تعريف الجدرور النونية على أن هذه الأخيرة تحقق جميع خصائص القوى بدون استثناء
من هنا يصبح من السهل تعميم مفهوم القوة الى قوة عدد حقيقي أسسه عدد كسري .

▪ أمثلة : أكتب الأعداد التالية على شكل جدور نونية لأعداد بسيطة :

$$625^{-\frac{4}{6}}\ ;\ 81^{-\frac{3}{4}}\ ;\ 81^{\frac{3}{4}}\ ;\ 125^{\frac{5}{9}}\ ;\ 16^{\frac{4}{6}}$$

إجابة :

....

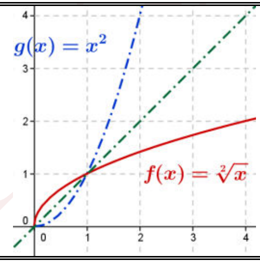
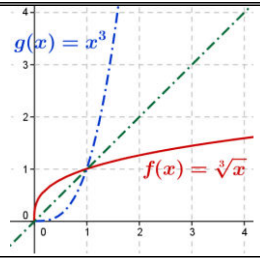
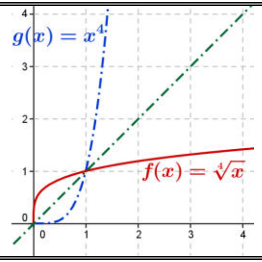
▪ خاصيات :

مهما تكن الأعداد الحقيقية الموجبة قطعا a و b ، ومهما تكن الأعداد الجدرية m و n فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ ;\ (ab)^n=a^nb^n\ ;\ (a^n)^m=a^{nm}\ ;\ \frac{1}{a^m}=a^{-m}\ ;\ \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\ ;\ a^na^m=a^{n+m}\ ;\ a^0=1$$

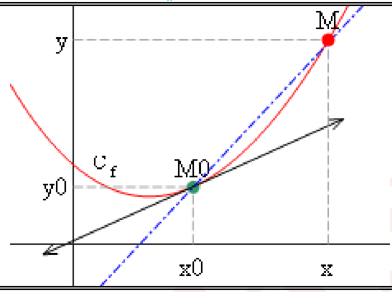
- مهما يكن $n\geq 2$ $(n\in IN)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

a) التمثيل المبياني للجدور النونية :

$f(x)=\sqrt[2]{x}$	$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f(x)=\sqrt[4]{x}$
f هي الدالة العكسية للدالة $g(x)=x^2$	f هي الدالة العكسية للدالة $g(x)=x^3$	f هي الدالة العكسية للدالة $g(x)=x^4$
x : 0 , 1 , $+\infty$ f(x) : 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$	x : 0 , 1 , $+\infty$ f(x) : 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$	x : 0 , 1 , $+\infty$ f(x) : 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$
		

III. Dérivabilité

1) قابلية اشتقاق دالة في نقطة :

▪ تعريف :	▪ التمثيل المبياني للدالة العكسية :
الدالة f قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 يعني أن : النهاية التالية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L\in IR$ تنتمي الى IR . يسمى العدد L العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 ونرمز له ب $f'(x_0)$ نكتب : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L\in IR$	
هندسيا فإن العدد المشتق $f'(x_0)$ يمثل المعامل الموجه لمماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول x_0.	ملاحظة: عندما يكون $L=\pm\infty$ تكون f غير قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 لكن منحناها (C_f) يقبل مماس يوازي محور الأراتيب .

2) خاصيات وصيغ عامة :

$(f\pm g)'=f'\pm g'$	$(\alpha.f)'=\alpha.f'$	$(f.g)'=f'.g+f.g'$	$(f^r)'=r.f^{r-1}.f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$	$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{(f'of^{-1})(x)}$	$(fog)'(x)=(f'og)(x).f'(x)$

3) مشتقات الدوال المرجعية :

f(x)	f '(x)	f(x)	f '(x)	f(x)	f '(x)

U^n	$n.U^{n-1}.U'$	$\sin U$	$U'.\cos U$	$\ln U$	U'/U
$\sqrt{U}=U^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}.U^{\frac{1}{2}-1}.U'=\frac{U'}{2\sqrt{U'}}$	$\cos U$	$U'.\sin U$	e^U	$U'e^U$
$\sqrt[n]{U}=U^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.U^{\frac{1}{n}-1}.U'$	$\tan U$	$U'.(1+\tan^2 U)=\frac{U'}{\cos^2 U}$	$Arc\tan U$	$U'/(1+U^2)$

4) الدوال الأصلية :

a) تعريف وخاصيات :

- الدالة الأصلية لدالة f على مجال I هي كل دالة F قابلة للاشتقاق على المجال I بحيث : $(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=f(x)$.
- إذا كانت الدالتين F و G أصليتين لنفس الدالة f على مجال I ، فإنه $(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=G'(x)$ وهذا يعني أن $(\forall x\in I)\ ;\ G(x)=F(x)+Cte$
- لإيجاد بعض الدوال الأصلية نعتمد على الجدولين السابقين حول الدوال المشتقة .

b) تطبيقات :

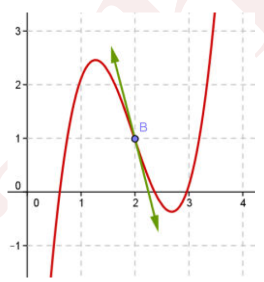
حدد الدوال الأصلية للدالة في كل حالة :

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x}+e^x\ ;\ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\ ;\ f(x)=\sin(2x)+\frac{1}{x}\ ;\ f(x)=2x^3-5x+2$$

إجابة :

....

5) الدالة المشتقة الثانية :

▪ تطبيق :	▪ تعريف وخاصية :
 	▪ تعريف : نرمز للدالة المشتقة الثانية لدالة f بالرمز f'' وهي المشتقة الأولى للدالة f' على سبيل المثال نعتبر الدالة التالية : $f(x)=2x^3-\cos x$ لدينا : $f'(x)=6x^2+\sin x$ ومنه $f''(x)=12x+\cos x$. ▪ خاصية : • إذا كان لدينا $f''(x)>0$ على مجال I ، فإن (C_f) تكون محدبة على المجال I. • إذا كان لدينا $f''(x)<0$ على مجال I ، فإن (C_f) تكون مقعرة على المجال I. • إذا كان $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها في نقطة x_0 ، فإن النقطة ذات الأفصول x_0 هي نقطة انعطاف بالنسبة للمنحنى (C_f) .

IV. Branches infinies IV.

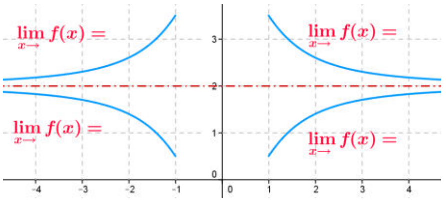
1) الفروع اللانهائية :

المنحنى (C_f) للدالة f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان x أو $f(x)$ يؤول الى $\pm\infty$. أي في الحالات التالية :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

ويمكن تحديد طبيعة الفرع اللانهائي حسب كل حالة باستعمال الجدول التالي :

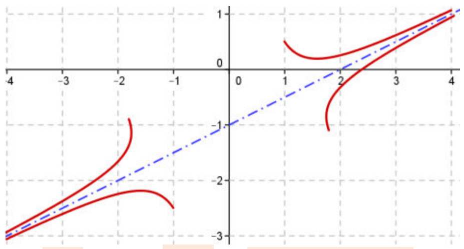
إذا كان : $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$	إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$



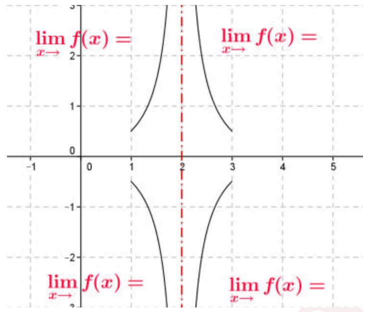
.... الذي معادلته .... مقارب ....
للمنحنى (C_f) بجوار .....

المستقيم $(\Delta) : y = ax + b$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار ∞

يعني أن : $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$



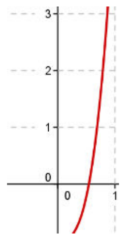
$f(x)-(ax+b)>0$	(C_f)	(Δ)
$f(x)-(ax+b)<0$	(C_f)	(Δ)



.... الذي معادلته .... مقارب ....
للمنحنى (C_f) بجوار .....

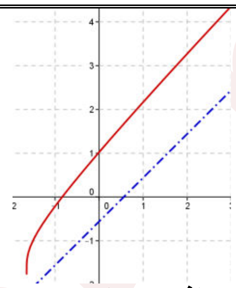
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$

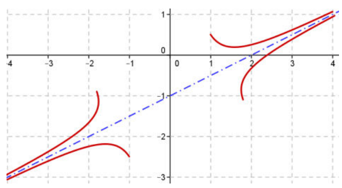


المنحنى (C_f) يقبل ....
.... في اتجاه (.......) بجوار
.....

إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$

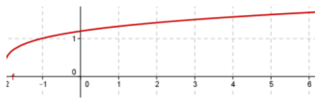


.... الذي معادلته ....
مقارب .... للمنحنى (C_f)
بجوار .....



المنحنى (C_f) يقبل ....
.... في اتجاه (.......) بجوار
.....

إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$



المنحنى (C_f) يقبل ....
.... في اتجاه (.......) بجوار
.....

Bonne Chance