

Exercice .1

Maths-inter.ma

1.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x}\right)\sqrt{27+x^2}$

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de 0 . (schéma)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a) Vérifier que $\forall x \in D_f ; f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{2x} \times \frac{27}{\sqrt{x^2+27+x}}$.

b) En déduire que la droite $(\Delta_1) : y = \frac{x+1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite $(\Delta_2) : y = -\frac{x+1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

3) a) Montrer que $\forall x \in D_f ; f'(x) = \frac{x^3 - 27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$.

b) Dresser son tableau de variations de f .

4) a) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

b) Tracer (C_f) .

Indication: on admet que $A(-5,2 ; 2,9)$ est le seul point d'inflexion pour (C_f) et que $f''(x)$ est négative sur $]-5,2, 0[$ et positive sur chacun des intervalles $]-\infty, -5,2[$ et $]0, +\infty[$.

Exercice .2

Maths-inter.ma

2.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue aux points 1 .

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point 1 , et donner une interprétation géométrique de chacun des résultats obtenus. (schématiser)

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$. (schématiser)

b) Calculer $f(-3)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c) Etudier la nature de la branche infinie au voisinage de $-\infty$

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty ; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$.

c) Donner le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

5) Tracer la courbe (C_f) sur le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x l'intervalle J . Calculer $g(\sqrt[3]{2})$, en déduire $(g^{-1})(1/2)$