I. Exercices de Rappel :

1) Prérequis :

- Suite majorée, minorée, bornée.
- Suites Croissante, décroissante.
- Suite Arithmétiques et géométriques.
- Démonstration par recurrence.

2) Exercice :01

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$

1) **Calculer U_2, U_1 .**
2) **Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $1 < U_n < 3$.**
3) **Etudier la monotonie de (U_n).**
4) **On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$.**
   a) **Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.**
   b) **Déterminer V_n en fonction de n .**
   c) **Déterminer U_n en fonction de V_n ، en déduire U_n en fonction de n .**
5) **On pose : $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{3}{U_n+2}$.**
   a) **Calculer G_n en fonction de n .**
   b) **Vérifier que : $\dfrac{3}{U_n+2} = 1 - V_n$.**
   c) **En déduire S_n en fonction de n .**

3) Exercice :02

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$

1) **Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $U_n \neq 5$.**
2) **Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $5 \leq U_n \leq 11$.**
3) **Etudier la monotonie de (U_n).**
4) **On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$.**
   a) **Montrer que (V_n) est une suite Arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.**
   b) **Déterminer V_n en fonction de n .**
   c) **Déterminer U_n en fonction de V_n ، en déduire U_n en fonction de n .**
5) **On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{U_n - 5}$.**

   Calculer S_n en fonction de n .

II. نهاية متتالية :

1) المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة :

نقول أن المتتالية (U_n) متقاربة إذا كانت لها نهاية تنتمي الى IR عندما يؤول المتغير n الى $+\infty$. أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \in IR$

وفي جميع الحالات الأخرى نقول أن المتتالية (U_n) غير متقاربة أوأنها متباعدة .

2) المتتاليات على شكل $U_n = f(n)$:

a) خاصية : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) تطبيقات:

- **التطبيق 1 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول **n** الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n = \dfrac{3n^2+2n-3}{5n^5-2n+5}$	$U_n = \dfrac{-3n^2-6n+5}{2n^2-4}$	$U_n = \dfrac{-3n^2-4n^5-11}{2n^2-4}$	$U_n = 3n^4-5n^2-7$

إجابات :

....

- **التطبيق 2 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n = 5\sqrt{3n^2+n+1}-7$	$U_n = 5\sqrt{2n+1}-7\sqrt{3n-2}$	$U_n = 5\sqrt{2n^2+1}-7\sqrt{3n-2}$

إجابات :

....

3) خاصيات النهايات :

a) خاصية 1 :

(U_n) و (V_n) متتاليتان بحيث : $U_n \le V_n \; ; \; (\forall n\in IN)$.

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.
- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

b) خاصية 2 :

(a_n) و (b_n) و (U_n) متتاليات عددية بحيث : $a_n \le U_n \le b_n \; ; \; (\forall n\in IN)$.

إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$.

c) تطبيقات :

- **التطبيق 3 :**

نعتبر المتتالية (U_n) *المعرفة كما يلي:* $U_n = \dfrac{3^n}{n+1} \quad (\forall n\in IN)$

1) **أحسب :** U_0 و U_1 و U_2

2) **أدرس تغيرات المتتالية** (U_n) .

3) **بين بواسطة الترجع أن :** $n < U_n \; ; \; (\forall n\in IN)$

4) **استنتج نهاية المتتالية** (U_n) .

إجابات :

....

- **التطبيق 4 :**

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ *المعرفة كما يلي:* $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

1) **أحسب :** U_1 و U_2 و U_3

2) **بين أن :** $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \; ; \; (\forall n\in IN^*)$

3) **استنتج نهاية المتتالية** (U_n) .

إجابات :

....

- **التطبيق 5 :**

نعتبر المتتالية (U_n) *المعرفة كما يلي:* $U_n = \dfrac{\sin n}{n^2+1} \quad (\forall n\in IN)$

1) **بين أن :** $-\dfrac{1}{n^2+1} \le U_n \le \dfrac{1}{n^2+1} \; ; \; (\forall n\in IN)$

2) **استنتج نهاية المتتالية** (U_n) .

إجابات :

....

4) دراسة نهاية المتتالية a^n :

• الحالة الأولى $a>1$: نضع $a=1+\alpha$ ، بما أن $a>1$ فإن $\alpha>0$.

لنبين بالترجع أن : $a^n>1+n\alpha_n \; ; \; (\forall n\in IN)$

إجابات :

....

نهاية المتتالية a^n : لدينا $a^n>1+n\alpha \; ; \; (\forall n\in IN)$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n\alpha)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$

• الحالة الثانية $-1<a<1$: نعتبر أن $a\neq 0$.

لدينا $|a|<1$ ومنه فإن $\dfrac{1}{|a|}>1$ ، حسب الحالة الأولى فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n=+\infty$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{|a|^n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}|a|^n=0$

وهكذا نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$

خاصية :

- إذا كان $-1<a<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$.
- إذا كان $1<a$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$.
- إذا كان $a\leq -1$ فإن المتتالية (a^n) **لا تقبل نهاية** .
- إذا كان $a=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=1$.

• **تطبيق 6 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n=5\sqrt{3n+1}-7\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$	$U_n=\left(-\dfrac{13}{17}\right)^n$	$U_n=\sqrt{2n^2+1}+7.3^n$

إجابات :

....

تجدون أسفله التمارين التطبيقية الواردة في الدرس

يُحبذ طبع هذه التمارين وتقديمها للتلاميذ بهدف إلصاق كل تمرين في مكانه المناسب على دفتر الدروس

تلافيا لضياع الوقت في الكتابة

بعد ّلك يكتب الحل بشكل عادي على دفتر الدروس

أنظر الصفحة الموالية

I.

(1

(2 التمرين الأول :

<table>
<tr>
<td>

e) حدد V_n بدلالة n .

f) حدد U_n بدلالة V_n ، ثم استنتج U_n بدلالة n .

10) نضع : $G_n=\sum_{k=1}^{k=n} V_n$ و $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{3}{U_n+2}$.

d) أحسب G_n بدلالة n .

e) تحقق أن : $\frac{3}{U_n+2}=1-V_n$.

f) استنتج S_n بدلالة n .

</td>
<td>

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$

6) أحسب U_1 , U_2 .

7) بين بواسطة الترجع أن: $1<U_n<3$; $(\forall n\in IN)$.

8) أدرس رتابة المتتالية (U_n) .

9) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث مهما يكن n من : $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+2}$.

d) بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

</td>
</tr>
</table>

3) التمرين الثاني :

<table>
<tr>
<td>

a) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ محددا حدها الأول V_0 .

b) حدد V_n بدلالة n .

c) حدد U_n بدلالة V_n ، ثم استنتج U_n بدلالة n .

5) نضع $S_n=\frac{1}{U_0-5}+\frac{1}{U_1-5}+\cdots+\frac{1}{U_n-5}$.

أحسب S_n بدلالة n .

</td>
<td>

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0=11 \\ U_{n+1}=\frac{7U_n-25}{U_n-3} \end{cases}$

1) بين بواسطة الترجع أن: $U_n\neq 5$; $(\forall n\in IN)$.

2) بين بواسطة الترجع أن: $5\le U_n\le 11$; $(\forall n\in IN)$.

3) أدرس رتابة المتتالية (U_n) .

4) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث مهما يكن n من : $V_n=\frac{1}{U_n-5}$.

</td>
</tr>
</table>

.II

- **التطبيق 1 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n=\frac{3n^2+2n-3}{5n^5-2n+5}$	$U_n=\frac{-3n^2-6n+5}{2n^2-4}$	$U_n=\frac{-3n^2-4n^5-11}{2n^2-4}$	$U_n=3n^4-5n^2-7$

- **التطبيق 2 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n=5\sqrt{2n^2+1}-7\sqrt{3n-2}$	$U_n=5\sqrt{2n+1}-7\sqrt{3n-2}$	$U_n=5\sqrt{3n^2+n+1}-7$

- **التطبيق 3 :**

نعتبر المتتالية (U_n) ***المعرفة كما يلي:*** $U_n=\frac{3^n}{n+1}$ $(\forall n\in IN)$

5) أحسب : U_0 و U_1 و U_2

6) أدرس تغيرات المتتالية (U_n) .

7) بين بواسطة الترجع أن : $n<U_n$; $(\forall n\in IN)$

8) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

- **التطبيق 4 :**

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ ***المعرفة كما يلي:*** $U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4) أحسب : U_1 و U_2 و U_3

5) بين أن : $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; $(\forall n\in IN^*)$

6) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

- **التطبيق 5 :**

نعتبر المتتالية (U_n) *المعرفة كما يلي:* $(\forall n \in IN) \quad U_n = \dfrac{\sin n}{n^2+1}$

3) بين أن : $(\forall n \in IN) \; ; \; -\dfrac{1}{n^2+1} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n^2+1}$

4) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

- **تطبيق 6 :**

أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$U_n = \sqrt{2n^2+1} + 7.3^n$	$U_n = \left(-\dfrac{13}{17}\right)^n$	$U_n = 5\sqrt{3n+1} - 7\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

Bonne Chance