

Exercice .1

Maths-inter.ma

1.

On considère la suite  $(U_n)$ , telle que:

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n^3 + 2}{U_n^2 + 1}$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < 2$
- 2) Etudier les variations de la suite  $(U_n)$ .

- 3) a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 2 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(2 - U_n)$ .
- b) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 2 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ .
- c) Montrer que  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

Exercice .2

Maths-inter.ma

2.

On considère la suite  $(U_n)$ , telle que:

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n^3}{3U_n^2 + 1}$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n$
- 2) Etudier les variations de la suite  $(U_n)$ .

- 3) a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_{n+1} < \frac{1}{3}U_n$ .
- b) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
- c) Montrer que  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

Exercice .3

Maths-inter.ma

3.

On considère la suite  $(U_n)$ , telle que: 
$$\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = 4 \\ U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_2$ .
- 2) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n+1} - U_n$

- a) Déterminer la nature de  $(V_n)$
- b) Calculer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer la somme  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- 4) En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

Exercice .4

Maths-inter.ma

4.

On considère la suite  $(U_n)$ , telle que: 
$$\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_2$ .
- 2) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n+1} - U_n$ 
  - a) Montrer que  $(V_n)$  est géométrique et déterminer sa raison  $q$ .

- b) Calculer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer la somme  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- 4) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
- 5) en En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

Exercice .5

Maths-inter.ma

5.

On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que: 
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ 5U_{n+1} = 2U_n + 9n + 15 \end{cases}$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : V_n = U_n - 3n$

- 1) Calculer  $U_1, V_0, V_1$ .
- 2) Calculer la somme  $A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

- 3) Montrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{2}{5}$ .
- 4) Calculer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 5) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
- 6) Calculer la somme  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Exercice .6

Maths-inter.ma

6.

On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que: 
$$\begin{cases} U_0 = -1 ; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_2$ .
- 2) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$  et  $W_n = \frac{U_n}{V_n}$

- a) Démontrer  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.
- b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3n-1}{2^n}$ .
- 3) Montrer que  $(\forall n \geq 2) ; \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ .
- 4) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)$ .

Exercice .7

Maths-inter.ma

7.

On considère la suite  $(U_n)$ , telle que: 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \sqrt{2} \end{cases}$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : V_n = U_n - 2$

- 1) que  $(V_n)$  est géométrique et déterminer sa raison  $q$ .

- 2) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
- 4) Calculer la somme :  $S_n = (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n)$ .

Bonne Chance