Exercice .1 Maths-inter.ma 1.

1) *Soit la suite numérique (U_n) définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 3/2 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$$

a) *Calculer* U_1, U_2 .

b) *Montrer que* $(\forall n \in IN)\ ;\ 2 - U_{n+1} = \dfrac{4}{U_n + 3}(2 - U_n)$.

c) *Montrer par récurrence que* $(\forall n \in IN)\ ; 1 < U_n < 2$.

2) *En déduire que* (U_n) *est croissante.*

3) *En déduire que la suite* (U_n) *est convergente.*

4) *Soit la suite numérique* $(\mathbf{V_n})$ *définie par :* $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

a) *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.*

b) *Calculer* V_n *en fonction de n, en déduire* U_n *en fonction de n.*

c) *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

5) *Calculer* $\mathbf{S_n} = \dfrac{4^0}{4^0 + 5^0} + \dfrac{4^1}{4^1 + 5^1} + \dfrac{4^2}{4^2 + 5^2} + \dots + \dfrac{4^p}{4^p + 5^p} + \dots + \dfrac{4^n}{4^n + 5^n}$,

en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n+1}$

Exercice .2 Maths-inter.ma 2.

1) *On considère la suite numérique* (U_n) *définie par :*

$U_0 = -5$; $(\forall n \in IN)$; $\mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{-7U_n - 8}{2U_n + 1}$

d) *Calculer* U_1, U_2 .

e) *Montrer par récurrence que* $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n \neq -2$.

2) *On considère la suite* $(\mathbf{V_n})$ *telle que :* $V_n = \dfrac{1 + 2U_n}{2 + U_n}$.

a) *Montrer que* (V_n) *est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.*

b) *En déduire* U_n *en fonction de n.*

c) *Montrer que :* $(\forall n \in IN)\ ;\ |\mathbf{U_n} + 2| \leq \dfrac{3}{n}$

d) *Calculer la limite de la suite* $(\mathbf{U_n})$ *de deux façons différentes.*

Exercice .3 Maths-inter.ma 3.

1) **On considère la suite numérique (U_n) définie par :**

$U_0 = 1/2$; $(\forall n \in IN)$; $U_{n+1} = \dfrac{5U_n}{2U_n + 3}$

a) **Calculer** U_1, U_2 .

b) **Montrer par récurrence que** $(\forall n \in IN)\ ; 0 < U_n < 1$.

c) **Montrer que** (U_n) **est strictement croissante. Que peut-on déduire ?**

2) **On considère la suite** (V_n) **telle que :** $V_n = 1 - \dfrac{1}{U_n}$.

a) **Montrer que** (V_n) **est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.**

b) **Montrer que :** $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

c) **En déduire que** $(\forall n \in IN)\ ;\ 0 < 1 - U_n < \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ **, et préciser la limite de la suite** (U_n) .

Exercice .4 Maths-inter.ma 4.

Soit la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ \mathbf{U_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$

1) **Montrer que** . $(\forall n \in IN^*)\ ;\ \dfrac{3}{2} < U_n < 2$

2) **On considère la fonction f définie pour** $x \geq 0$ **par :** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

3) **Etudier les variations de la fonction f.**

4) **Montrer que** $\left(\forall (x,y) \in [3/2, +\infty[^2\right)$; $|\mathbf{f(x) - f(y)}| \leq \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}|x - y|$

5) **Soit l la racine positive de l'équation f(l) = l ,Montrer que :**

$(\forall n \in IN^*)\ ;\ |U_{n+1} - l| \leq \dfrac{4}{9}|U_n - l|$

En déduire que les suites : $(\forall n \in IN^*)\ ;\ |U_n - l| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}|U_1 - l|$

6) **Montrer que** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice .5 Maths-inter.ma 5.

On considère la suite $(\mathbf{U_n})$, telle que: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{2U_n}{3 + \sqrt{U_n}} \end{cases}$

1) **Montrer par recurrence que** $(\forall n \in IN)$; $0 < \mathbf{U_n}$.

2) **Etudier les variations de la suite** $(\mathbf{U_n})$, ***en déduire qu'elle est convergente.***

3) Montrer que $(\forall n \in IN)$; $\mathbf{0 < U_{n+1} < \dfrac{2}{3}U_n}$

4) ***En déduire que*** $(\forall n \in IN)$; $\mathbf{0 < U_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

5) **En déduire** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{U_n}$.

Bonne Chance