I. Fonction exponentielle népérienne

1) *Introduction :*

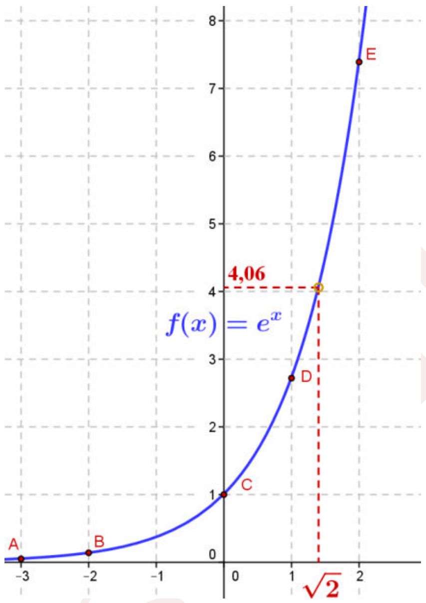
Il existe un nombre irrationnel note e, dont une valeur approchée est $e \approx 2,7$.

On considère la fonction f , définie sur IR par : $(\forall x \in IR)\ ;\ f(x) = e^{x}$.

Calculons les images de quelques nombres par cette fonction, en utilisant la calculatrice:

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2
f(x)	$e^{-3} \approx 0,05$	$e^{-2} \approx 0,14$	$e^{-1} \approx 0,37$	1	$e \approx 2,7$	$e^{2} \approx 7,39$
pts sur C_f	A	B	C	D	E	F

En utilisant un logiciel approprié, on trace la courbe C_f de la fonction f :



2) *Propriétés analytiques de la fonction :*

- ✓ Domaine de définition et continuité : f est définie et continue sur IR.
- ✓ Limites :

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^{+}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0^{-}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

- ✓ Fonction dérivée – Variations – Signe : la dérivée de la fonction f est f elle-même :

$$(\forall x \in IR)\ ;\ f'(x) = e^{x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	1	+	
f(x) تغيرات	0	↗			$+\infty$
f(x) إشارات		+	+	+	

- ✓ Remarques :

  Première remarque : $(\forall x \in IR)\ ;\ e^{x} > 0$.

  Deuxième remarque : U est une fonction dérivable, on a : $\left(e^{U}\right)' = u'\,e^{U}$

3) *Propriétés algébriques de la fonction :*

Le nombre e^x est une généralisation de la puissance du nombre **e** tel que **x** est réel.

On a par exemple : $e^3 = e\times e\times e$ et $e^{3/5} = \left(e^3\right)^{1/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

Le nombre $e^{\sqrt{2}}$ est aussi une puissance du nombre **e** , mais on ne peut avoir que une valeur approchée en utilisant la courbe ou la calculatrice .

Les propriétés du nombre e^x ce sont les mêmes que ceus des puissances, quel que soit **x** de IR et **r** de **Q** .

$$(e^x)^r = e^{rx} \quad ; \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad ; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad ; \quad e^x e^y = e^{x+y} \quad ; \quad e^0 = 1$$

I. Fonction logharithme népérienne

1) *Introduction :*

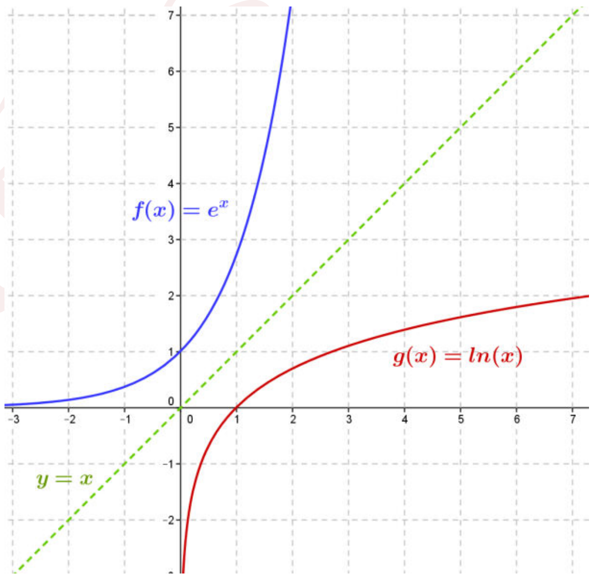
La fonction exponentielle f précédente est continue et strictement croissante de IR vers $]0,+\infty[$. Donc f admet une fonction réciproque g définie de $]0,+\infty[$ vers IR . On pose : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $g(x) = \ln x$.

On a : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ (\forall t\in IR)$; $t=\ln x \Leftrightarrow x = e^t$

En en déduit : $\mathbf{e^0 = 1}$ et $\mathbf{\ln e = 1}$ et les limites remarquables suivantes :

On a	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
D'où	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$

En utilisant un logiciel approprié, on trace la courbe $\mathbf{C_g}$ de la fonction f , qui est le symétrique de $\mathbf{C_f}$ par rapport à la première biscectrice $(\Delta): y = x$:



2) *Propriétés analytique de la fonction :*

- ✓ Domaine de définition et continuité : **g** est définie et continue sur $\mathbf{D_g} =]0,+\infty[$.
- ✓ Limites :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0^-$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0^+$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$

- Fonction dérivée – Variations – Signe : la dérivée de la fonction g est :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ g'(x)=\frac{1}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$		$+$	
$g(x)$ تغيرات	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$ إشارات	||	$-$	0	$+$	

- Remarques :

  Première remarque : $(\forall x\in]0,1[)\ ;\ \ln x<0$.

  Deuxième remarque : u est une fonction dérivable, on a : $(\ln(|u|))'=\dfrac{u'}{u}$

3) *Propriétés anlgébriques de la fonction :*

En utilisant la relation : $(\forall x\in]0,+\infty[)\,(\forall t\in IR)\ ;\ t=\ln x \iff x=e^t$

En en déduit ; quel que soit x et y de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbf{Q}$.

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln y\quad ;\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y\qquad \ln(x^r)=r\ln x\quad ;\quad \ln(xy)=\ln x+\ln y\quad ;\quad \ln 1=0$$

I. *Fonction Exponentielle et fonction logharithme de base a*

1) *Introduction :*

La fonction exponentielle f précédente $\mathbf{f(x)=e^x}$ est dite, fonction exponentielle de base $\mathbf{e}$.

En général, la fonction exponentielle de base $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a>0}$ et $\mathbf{a\neq 1}$), est la fonction $\mathbf{u}$ définie par :

$$(\forall x\in IR)\ ;\ u(x)=e^{x\ln a}$$

Le nombre $\mathbf{e^{x\ln a}}$ est noté $\mathbf{a^x}$,ainsi l'expression de la fonction $\mathbf{u}$ devient :

$$(\forall x\in IR)\ ;\ u(x)=a^x=e^{x\ln a}.$$

La fonction u est continue et strictement croissante de IR vers $]0,+\infty[$.

la fonction logarithme de base a est v, la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base $\mathbf{a}$.

On pose : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ v(x)=\log_a(x)$

On a : $y=\log_a(x) \iff x=a^y \iff x=e^{y\ln a} \iff y\ln a=\ln x \iff y=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

D'où : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ v(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

1) *Propriétés anlgébriques de la fonction :*

Quel que soit le nombre réel x et quel que soit le nombre rationnel r .

$$(a^x)^r = a^{rx} \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad ; \quad a^0 = 1$$

Quel que soit les nombres réels **x** et **y** et quel que soit le nombre rationnel r .

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \ln(x^r) = r\ln x \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln 1 = 0$$

Bonne Chance