I. Introduction des nombres complexes :

Au cours des années précédentes, on a appris qu'il existe plusieurs types de nombres : les nombres entiers naturels , les nombres entiers relatifs , les nombres décimaux , les nombres rationnels et les nombres réels .
Nous allons admettre qu'il existe un nombre imaginaire noté i et qui vérifie la propriété suivante : $i^2=-1$.
Si on multiplie le nombre i par un nombre réel, on obtient d'autres nombres imaginaires purs tels que :

$$-\frac{\sqrt{3}}{5}i \quad ; \quad \frac{2+\sqrt{7}}{3}i \quad ; \quad i\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{11}{4}i \quad ; \quad -4i\sqrt{2} \quad ; \quad 3i$$

En général un imaginaire pur est tout nombre de la forme bi avec b un nombre réel.
L'ensemble de tous les imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ et on a : $i\mathbb{R}=\{z=bi\,/\,b\in\mathbb{R}\}$
Si on fait la somme d'un imaginaire pur et d'un nombre réel, on obtient un nouveau nombre appelé nombre complexe tels que :

$$3-\frac{\sqrt{3}}{5}i \quad ; \quad -1+\frac{2+\sqrt{7}}{3}i \quad ; \quad \frac{11}{4}+i\sqrt{2} \quad ; \quad -3+\frac{11}{4}i \quad ; \quad 0-4i\sqrt{2} \quad ; \quad 2+3i$$

En général un nombre complexe est tout nombre de la forme $a+bi$ avec a et b deux nombres réels.
L'écriture $a+bi$ est dite « écriture algébrique du nombre complexe $a+bi$, le nombre a est appelé partie réelle et b est la partie imaginaire de $a+bi$. On écrit :

(Partie imaginaire de z) $\mathrm{Im}(z)=b$ et (Partie réelle de z) $\mathrm{Re}(z)=a$

L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et on a : $\mathbb{C}=\{z=a+bi\,/\,a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}\}$

II. Conjugué et module d'un nombre complexe :

1) Conjugué d'un nombre complexe :

Le conjugé du nombre comlexe $z=a+bi$ est le nombre complexe noté $\bar{z}$ ‘ tel que $\bar{z}=a-bi$.

Application : **Déterminer les conjugués des complexes suivants : $-3+\frac{11}{4}i$; $0-4i\sqrt{2}$; $2+3i$**

Réponses:

....

2) Module d'un complexe :

Le module d'un nombre comlexe z est le nombre comlexe noté $|z|$ ‘ tel que $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}$.

Application : **Déterminer les modules des complexes suivants : $-3+\frac{11}{4}i$; $0-4i\sqrt{2}$; $2+3i$**

Réponses:

....

3) Opérations sur leconjugés :

On démontre aisément que , quels que soient les complexes z_1 et z_2 ($z_2\neq 0$)) :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad ; \quad \overline{\alpha.z_1}=\alpha.\overline{z_1} \quad ; \quad \overline{(z_1)^n}=\overline{z_1}^n \quad ; \quad \overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2} \quad ; \quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

4) Relations entre le complexe et son conjugé :

Posons $z = a + ib$ **d'où** $\overline{z} = a - ib$ **, on vérifie que :**

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad ; \quad z - \overline{z} = 2ib = 2\,\mathrm{Im}(z) \quad ; \quad z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

5) Propriétés :

De ce qui précéde , on déduit que :

$$|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff \overline{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff a = 0 \iff \overline{z} = -z$$

6) Propriétés du module :

Soit le nombre complexe $z = a + bi$

- **Si** $z \in \mathbb{R}$ **c'est à die** $b = 0$ **, alors** $|z| == \sqrt{a^2} = |a|$
  On en déduit que le module est un prolongement de la notion de la valeur absolue .
- **On démontre aisément que , quels que soient les complexes** z_1 et z_2 ($z_2 \neq 0$)) :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z^n| = |z|^n \qquad |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad |z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

III. Forme trigonométrique – forme exponentielle d'un complexe – norme et argument:

1) Forme trigonométrique – forme exponentielle d'un complexe

Soit le nombre complexe non nul $z = a + bi$ ، **on peut écrire :**

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Remarquons que: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$ ، **d'où l'existence d'un réel** α **tel que :**

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Le nombre $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ **est le module de** z و ، α **est appelé argument de** z **, on le note** $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$**.**

L'écriture $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ **est l'écritue trigonométrique de** z**.**
L'écriture $z = re^{i\alpha}$ **est l'écritue exponnentielle de** z**.**

2) Propriétés du module et de l'argument :

Soient les nombres complexes : $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$.
On a :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i\alpha_1 + i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{و} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha_1}}{r_2 e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\alpha_1 - i\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

D'autres part, soit le complexe : $z = r\,e^{i\alpha}$.

On a : $\overline{z} = \overline{r\,e^{i\alpha}} = r\,\overline{(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = r\,(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r\,(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = r\,e^{i(-\alpha)}$

On démontre par récurrence aussi que quel que soit n **de** $\mathbb{N}$: $z^n = r^n e^{in\alpha}$ **c'est la formule de Moivre .**

On déduit de ce qui précéde que:
Quels que soient les comlexes z_1 و z_2 $(z_2 \neq 0)$:

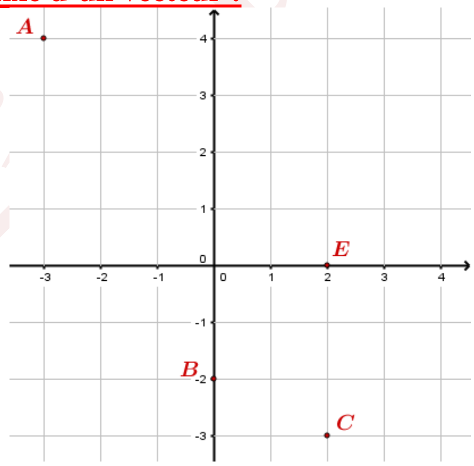
$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z^n| = |z|^n \qquad |\overline{z}| = |z|$$

Et quels que soient les comlexes non nuls z_1 و z_2 **:**

$$\mathrm{Arg}(z_1 \times z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$
$$\mathrm{Arg}(z_1 \times z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$$
$$\mathrm{Arg}(z_1^n) = n\mathrm{Arg}(z_1)$$
$$\mathrm{Arg}(\overline{z_1}) = -\mathrm{Arg}(z_1)$$

IV. Nombres complexes et géométrie plane :

1) Affixe d'un point - affixe du milieu – affixe d'un vecteur :



Le plan est d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Tout couple (x, y) **de** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **represente les coordonnées d'un point** M **du plan, on écrit :** $M(x, y)$.
Soit le nombre complexe $z = x + yi$ ، **on dit que** z **l'Affixe du point** M **on écrit :** $M(z)$.

Application : **: Reorésenter les point suivants dans le repère** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **:**
$E(2)$; $D(4+i)$; $C(-2i)$; $B(2-3i)$; $A(-3+4i)$
Réponses : **(voir figure)**

Soient les points $M_1(z_1)$ **et** $M_2(z_2)$ **et** $I\ (z_I)$ **le milieu de** $[M_1M_2]$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ **est le nombre réel qu'on note** $\mathrm{Aff}\,\overrightarrow{M_1M_2}$ **tel que :** $\mathrm{Aff}\,\overrightarrow{M_1M_2} = z_2 - z_1$
L'affixe du point $I\ (z_I)$ **milieu du segment** $[M_1M_2]$ **est le nombre complexe :** $z_I = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

Application : **Dans le repère** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **on considère les points :**
$A(5+4i)$; $B(2i)$; $C(-2-i)$; $D(3+i)$

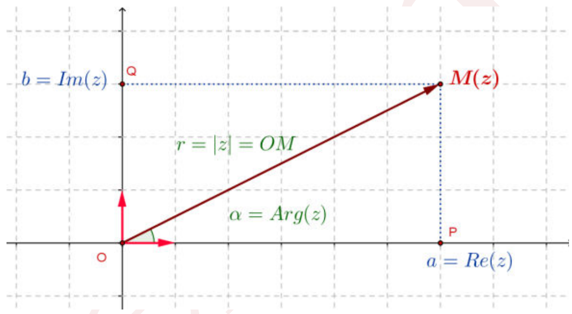
a) **Déterminer les affixes des vecteurs :** $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$.
b) **Calculer les distances :** BD ; AC ; AD ; AB

c) **Déterminer les affixes des points :** K ; J ; I **milieux respectifs des segments** $[BD]$; $[AC]$; $[AB]$.
d) **Déterminer la nature du quadrilatère** $ABCD$ **De deux façons différentes.**
e) **Le quadrilatère** $ABCD$ **est-il un losange ? justifier**
f) **Le quadrilatère** $ABCD$ **est-il un carré ? justifier**
g) **Le quadrilatère** $ABCD$ **est-il un Rectangle ? justifier**

Réponses : ....

2) Interprétation du module et de l'argument:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit le nombre complexe $z = a + bi$.
Et soit le point $M(z)$, **on a** : $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.



D'autre part, dans le triangle **OMP** on a:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{a}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{OQ}{OM} = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$

Ce qui fait : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ،

On en déduit que : $\operatorname{Arg}(z) = (\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{OM}})$

3) Généralisation:

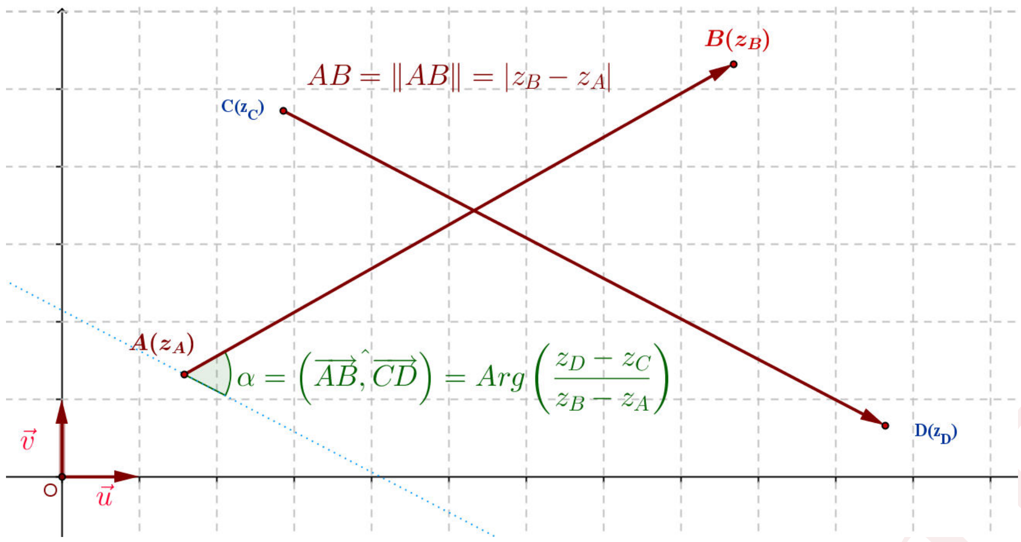
✓ **Soient les points** $A\ (z_A)$ **et** $B\ (z_B)$, **on a :** $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

✓ **Soient les points** $A\ (z_A)$; $B\ (z_B)$; $C\ (z_C)$ **et** $D\ (z_D)$.

On a d'après le théorème de Chasles : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{U}}) + (\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{CD}})$, **d'où :**

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = (\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{CD}}) - (\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{AB}}) = \operatorname{Arg}(z_D - z_C) - \operatorname{Arg}(z_B - z_A) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Soit enfin : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



V. Expressions Complexes des transformations affines usuelles:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan.

1) Translation:

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $Aff\,\vec{u} = a + ib$, on a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = Aff\,\vec{u} \Leftrightarrow z' = z + Aff\,\vec{u} \Leftrightarrow z' = z + a + bi$$

D'où : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + Aff\,\vec{u}$

2) Homothétie:

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k, on a :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow z' = k(z - \omega) + \omega$$

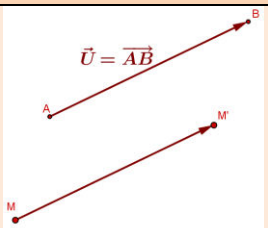
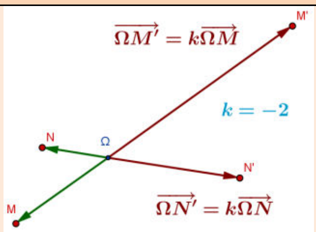
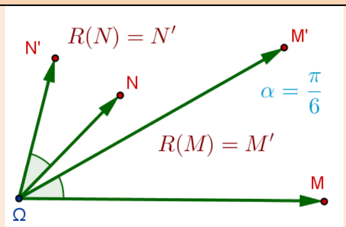
D'où : $h(M) = M' \Leftrightarrow z' = k(z - \omega) + \omega$

1) Rotation:

Soit R la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α, on a :

2) $$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z'-\omega}\right| = 1 \\ Arg\left(\frac{z'-\omega}{z'-\omega}\right) = \alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z'-\omega} = e^{i\alpha}$$

D'où : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Translation	Homothétie $(k = -2)$	Rotation
		

VI. Equations de second degré dans $\mathbb{C}$, Cas : $\Delta < 0$

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des réels avec $a \neq 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

- ✓ **Si $\Delta > 0$ L'équation admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$**
- ✓ **Si $\Delta = 0$ L'équation une solution double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$**
- ✓ **Si $\Delta < 0$ ، on peut écrire Δ sous la forme $\Delta = -d^2 = i^2d^2 = (id)^2$, d'où l'équation admet deux solutions complexes conjugées : $z_1 = \dfrac{-b-di}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+di}{2a}$**

Bonne Chance