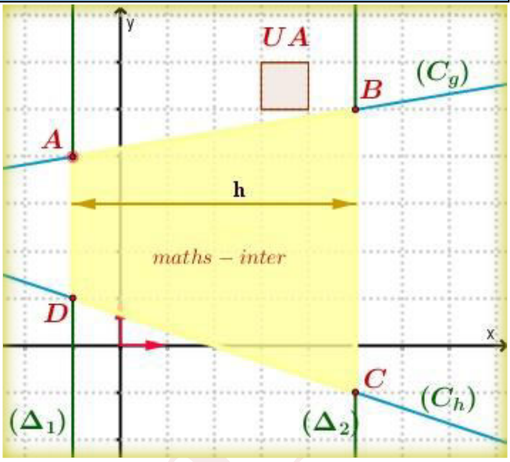
I. Théorème et Définition

1) **Introduction :** Soient les fonctions g et h telle que:

$$g(x)=\frac{1}{6}x+\frac{25}{6} \quad \text{et} \quad h(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$



(C_g) et (C_h) sont les courbes representatives des fonctions g et h.
Considèrons les droites $(\Delta_1): x=a$ et $(\Delta_2): x=b$ tells que $a=-1$ et $b=5$.
Soit S la surface de la zône limitée par $(C_g),(C_h),(\Delta_1)$ et (Δ_2). S est la surface du trapeze $ABCD$ (voir figure).
Soit h la hauteur du trapèze $ABCD$, on a:

$$S=\frac{h(AD+BC)}{2}=\frac{6(3+6)}{2}=27\text{ UA}$$

D'où : $S=27\text{ UA}$

Soit F une primitive de la fonction $f=g-h$, on a :

$$f(x)=g(x)-h(x)=\left(\frac{1}{6}x+\frac{25}{6}\right)-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}x+\frac{25}{6}+\frac{2}{6}x-\frac{4}{6}=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$, **d'où:** $F(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{2}x$.

Calculons $F(b)-F(a)$ qu'on notera: $[F(b)]_a^b$:

La la surface S de la zône limitée par $(C_g),(C_h),(\Delta_1)$ et (Δ_2) sera notée : $S=\int_a^b (g(x)-h(x))dx=\int_a^b f(x)dx$

Ce qui fait $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

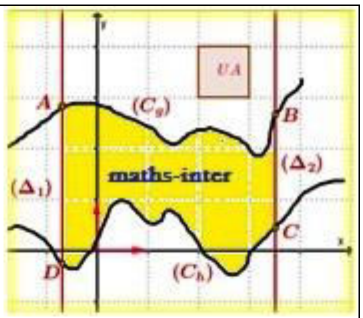
2) **Généralisations des résultats :**

g et g sont deux fonctions continues, on pose: $f=g-h$.
$(\Delta_1): x=a$ **et** $(\Delta_2): x=b$ deux droites parallèles à l'axe des ordonnées.

L'aire de la zone limitée par (C_g) , (C_h) , (Δ_1) **et** (Δ_2) **est notée**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (g(x)-h(x))dx.$$

On a : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ **F étant une fonction primitive de f .**



Applications : Calculer les intégrales

$I=\int_0^1 (x^2-3x+2)dx$ ؛ $J=\int_1^2 (\frac{1}{x^2}-3\frac{1}{x}+2)dx$ ؛ $K=\int_0^{\pi/2} (\cos x-3\sin x)dx$

Réponses :

....

II. Propriétés générales

1) **linéarité :**

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b k.f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \quad k\in\mathbb{R}$$

2) **Relation de schasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3) **Intégrales et ordre :**

Si $\forall x \in [a,b] \quad ; \quad f(x) \geq 0$ Alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $\forall x \in [a,b] \quad ; \quad f(x) \leq g(x)$ Alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

4) **La valeur moyenne :**

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ est égale au nombre reel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III. Méthodes de calcul des intégrales :

Primitives usuelles		
$\int x^r.dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} \quad (r \neq -1)$	$\int \frac{1}{x^n}.dx = \frac{1}{-n+1}x^{1-n} \quad (n \neq 1)$	$\int \frac{1}{x}.dx = \ln\lvert x\rvert$
$\int \cos x.dx = \sin x$	$\int \sin x.dx = -\cos x$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}.dx = \tan x$
$\int (1+\tan^2 x).dx = \tan x$	$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = Arc\tan x$	$\int e^x.dx = e^x$

Méthodes directes d' intégration

La fonction à intégrer se trouve dans le tableau des primitives usuelles, ou se ramène à l'une des fonctions de ce tableau.

Propriété intéressante en pratique

$$\int (\alpha.f(x) + \beta.g(x)).dx = \alpha.\int f(x).dx + \beta.\int g(x).dx$$

intégration des fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est de la forme, où P et Q sont des fonctions polynômes : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Si $d°P > d°Q$, *on fait la division euclidienne de* $P(x)$ *par* $Q(x)$ *et on obtient :*

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{avec } d^0R \,\pi\, d^0Q$$

$$\int f(x) = \int P_1(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La première $\int P_1(x)$ *intégrale est facile à calculer, notre problème est de savoir calculer* $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$. *Traitons les cas les plus utiles :*

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln\lvert x-a\rvert + Cte$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^m}dx = \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + Cte \quad (m \neq 1)$$

l'intégrale suivante $\mathbf{I=\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx}$ *se calcule suivant le signe de* $\mathbf{\Delta = b^2-4ac}$

$\Delta = b^2-4ac > 0$	$\Delta = b^2-4ac = 0$	$\Delta = b^2-4ac < 0$
$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$	$x^2+px+q=(x-\alpha)^2$	$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2$
$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$	$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}$	$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ $=\frac{a(x-\alpha)+b+a\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

Exemples		أمثلة
$I=\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx$	$I=\int \frac{2x+1}{x^2-6x+9}dx$	$I=\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

intégration des fonctions trigonométriques

En général les puissances et les produits de fonctions trigonométriques sont transformés en sommes ou différences, en utilisant l'une des méthodes :

En utilisant les formules trigo suivantes suivant les cas :

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$	$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$
$\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$	$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
$\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$	$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

En utilisant les formules de linéarisation:

$u=\cos x+i\sin x$	$u^p=\cos px+i\sin px$
$v=\cos x-i\sin x$	$v^p=\cos px-i\sin px$
$u+v=2\cos x$	$u^p+v^p=2\cos px$
$u-v=2i\sin px$	$u^p-v^p=2i\sin px$
$u.v=1$	$u^p.v^p=1$

Exemple : linéariser	$\cos^3 x$ puis $\cos^3 x$	مثال : أخطط

intégration par parties

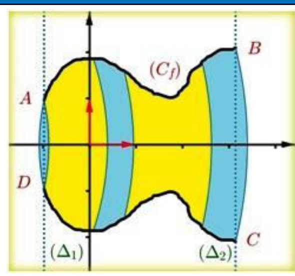
On utilise la formule suivante :

$$\int_a^b U'V=[U.V]_a^b-\int_a^b UV'$$

IV. Calcul de volume :

Le volume d'un solide de révolution engendré par la rotation d'une courbe (C_f) par rapport à l'axe des abscisses (tour complet) sur un intervalle $[a,b]$ est:

$$\int_a^b \pi(f(x))^2dx$$



Bonne Chance