I. Les déterminants et leurs applications

1) Déterminants :

Déterminant d'odre 2	Déterminant d'odre 3
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$	$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & h \\ f & k \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & g \\ f & k \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$

2) Propriétés

- ✓ Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires si et seulement si , il existe deux réels α et β tels que : $\vec{W} = \alpha.\vec{U} + \beta.\vec{V}$.
- ✓ Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires si et seulement si : $\det\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = 0$.

Exercice :1

a) Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} \; ; \; D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \; ; \; C = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \; ; \; B = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \; ; \; A = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires $\vec{W}(1,5,4)$; $\vec{V}(-2,2,3)$; $\vec{U}(5,3,2)$?

c) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires $\vec{S}(2,0,7)$; $\vec{R}(-1,1,0)$; $\vec{T}(1,1,7)$?

3) L'équation cartésienne et la représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :

Exercice :2

Dans un repère orthonormée, on considère les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

c) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).

d) Donner une équation cartésiènne du plan (ABC).

Exercice :3

1) Soit le plan définie par : $(P) : \begin{cases} x = 2k + k' - 1 \\ y = -k + 2k' + 2 \\ z = 3k - k' - 3 \end{cases}$; $(k \in IR \; ; \; k' \in IR)$

a) Déterminer les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ vecteurs directeurs de (P).

b) Donner trois A et B et C du plan (P).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

2) soit (Γ) le plan dont l'équation cartésienne est $(\Gamma) : \; x - y - z + 1 = 0$

a) montrer que $A(0,0,1)$; $B(1,1,1)$; $C(2,1,2)$ appartiennent au plan (Γ).

b) Déterminer une représentation paramétrique de (Γ).

II. Le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace

Dans le repère otthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{U}(a,b,c)$ و $\vec{U}(a',b',c')$.

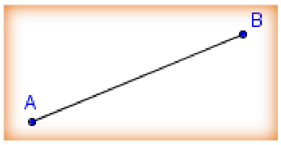
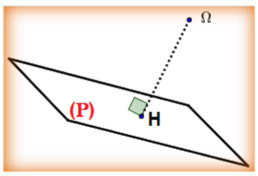
	Produit Scalaire	Produit vectoriel
Définition	**Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}(a,b,c)$ et $\vec{V}(a',b',c')$ est le nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ tel que :** $\vec{U}.\vec{V}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=aa'+bb'+cc'$	**Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}(a,b,c)$ et $\vec{V}(a',b',c')$ est le vecteur noté $\vec{U}\wedge\vec{V}$ tel que :** $\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & a & a'\\ \vec{j} & b & b'\\ \vec{k} & c & c'\end{vmatrix}=\left(bc'-cb'\right)\vec{i}-\left(ac'-ca'\right)\vec{j}+\left(ab'-ba'\right)\vec{k}$
Remarques	$\vec{U}.\vec{V}=\lVert\vec{U}\rVert\times\lVert\vec{V}\rVert\times\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$ $\lVert\vec{U}\rVert=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$	**le produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan de vecteurs directeurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, dont le sens est définie par la règle de la main droite et dont la norme est : $\lVert\vec{U}\wedge\vec{V}\rVert=\lVert\vec{U}\rVert\times\lVert\vec{V}\rVert\times\sin(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$**
Propriètés	$\vec{U}.\vec{V}=0 \Leftrightarrow \vec{U}\perp\vec{V}$	$\vec{U}.\vec{V}=0 \Leftrightarrow$ **$\vec{U}$ et $\vec{V}$ colinèaires** $\Leftrightarrow \vec{V}=k\vec{U}$

Exercice :4

Dans un repère orthonormée, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ؛ $B\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ ؛ $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ؛ $E\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ ؛ $F\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$

a) **Déterminer les coordonnées des vecteurs** $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et $\vec{EF}$ et $\vec{AE}$.
b) **Calculer les distances** AB et EF.
c) **Montrer que les droites** (AB) et (AC) **sont perpendiculaires.**
d) **Montrer que les droites** (AB) et (EF) **sont perpendiculaires.**
e) **Calculer** $\vec{AB}\wedge\vec{AE}$ **en déduire que les points** A et B et E **sont non alignés**
f) **Déterminer une équation cartésiènne du plan** (ABE).
g) **Déterminer une représentation paramétrique de la droite** (Δ) **passant par et perpendiculaire au plan** (ABE).

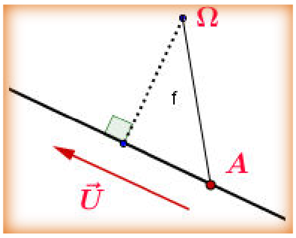
III. Calcul de distances – surface d'un triangle

Propriété	figure
Distance entre deux points : $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$	
Distance entre un point et un plan : $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ et $(P):\ ax+by+cz+d=0$ $d(\Omega,(P))=\dfrac{\lvert ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	

Distance entre un point et une droite :

Ω un point de l'espace
et (Δ) **une droite passant par** A **et de vecteur directeur** $\vec{U}$

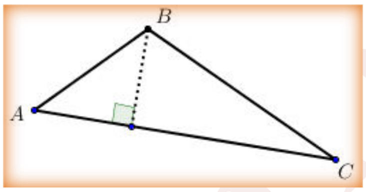
$$d(\Omega,(\Delta))=\frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{U}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|}$$



Aire d'un triangle ABC

Soit S **l'aire du triangle** ABC on a :

$$S=\frac{AB\times AC\times\sin\hat{A}}{2}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$



Exercice :5

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct
Soient les points $A(2,-1,1)$ ؛ $B(1,1,1)$ ؛ $C(2,1,-3)$

1) **Calculer les distances** AB **et** AC **et** BC
2) **Soit** (P) **le plan dont l'équation cartésienne est** $(P):\ 2x-y-3z+2=0$
   Calculer les distances : $d(A,(P))$ et $d(B,(P))$ et $d(C,(P))$
3) **Soi** (Δ) **la droite qui passe par le point** $E(-1,2,1)$ **et de vecteur directeur** $\vec{U}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$
   Calculer les distances $d(A,(\Delta))$ و $d(B,(\Delta))$ و $d(C,(\Delta))$
4) **Calculer la surface du triangle** ABC

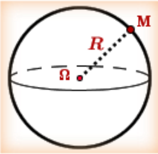
IV. La sphère

1) Equation de la sphère — figure

Sphère définie par son centre et son rayon

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ et de rayon R

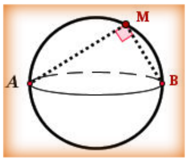
$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \Omega M=R\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$



Sphère définie par un diamètre

Soit (S) la sphère de diamètre $[AB]$

$$M(x,y,z)\in(S)\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$



Exercice :6

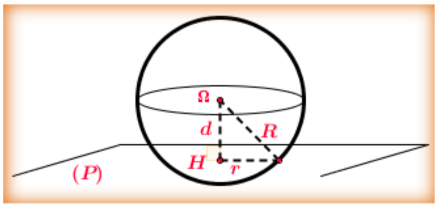
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct
Soient les points $A(1,-1,2)$ ؛ $B(2,-3,0)$ ؛ $\Omega(0,-1,2)$

1) **Déterminer l'équation de la sphère** (S_1) **de centre** Ω **et de rayon** $R=2\sqrt{3}$.
2) **Déterminer l'équation de la sphère** (S_2) **de diamètre** $[AB]$.
3) **Soit** (Γ_1) **l'ensemble des points** $M(x,y,z)$ **tels que :** $x^2+y^2+z^2\_2x+4y-13=0$
   Montrer que (Γ_1) **est une sphère et déterminer son centre et son rayon.**
4) **Soit** (Γ_2) **l'ensemble des points** $M(x,y,z)$ **tels que :** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=13$
   Montrer que (Γ_1) **est une sphère et déterminer son centre et son rayon.**

2) Position relative d'un plan et d'une sphère

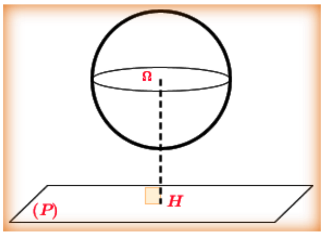
(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan de l'espace

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) et d est la distance entre le point Ω et le plan (P)



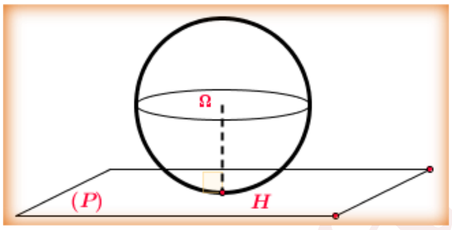
$d < R$

Dans ce cas le plan coupe la sphère suivant un cercle de centre r tel que: $r^2 = R^2 - d^2$



$d > R$

Dans ce cas le plan ne coupe pas la sphère



$d = R$

Dans ce cas le plan est tangent à la sphère en un point H

Exercice :7

(S) **est la sphère de centre** $\Omega(2,1,-2)$ **et de rayon** $R = 1$

Soit (P) **le plan d'équation cartésienne** $: (P): \quad 2x - y - 2z + 2 = 0$

Calculer $d(\Omega,(P))$ **en déduire la position relative entre le plan** (P) **et la sphère** (S) **.**

Exercice :8

(S) **est la sphère d'équation cartésienne :** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

et (P) **le plan d'équation cartésienne** $: (P): \quad 2x - y - 2z + 5 = 0$

1) **Déterminer** Ω **le centre de la sphère** (S) **et de rayon** R **.**
2) **Montrer que** (P) **est tangent à la sphère** (S) **et déterminer les coordonnées du point d'intersection** H **.**

Exercice :9

(S) **est la sphère de centre** $\Omega(1,1,-1)$ **et de rayon** $R = 3$

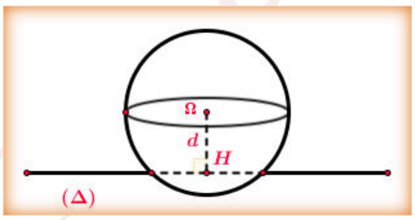
et (P) **le plan d'équation cartésienne** $: (P): \quad x + y - z = 0$

1) **Calculer** $d(\Omega,(P))$ **.**
2) **En déduire que le plan** (P) **coupe la sphère** (S) **suivant un cercle** (C) **et déterminer son rayon** r **.**
3) **Déterminer la représentation paramétrique de la droite** (Δ) **passant par** Ω **et perpendiculaire au plan** (P) **.**
4) **Déterminer les coordonnées** H **centre du cercle** (C) **.**

3) Position relative d'une droite et d'une sphère

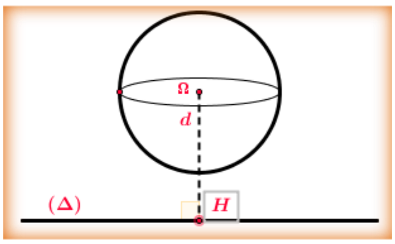
(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) une droite de l'espace

H est la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) et d est la distance entre le point Ω et la droite (Δ)



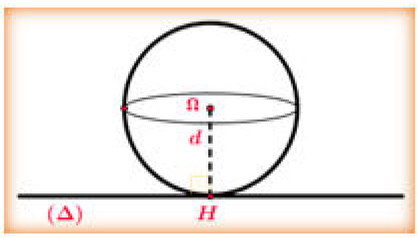
$d < R$

Dans ce cas la droite coupe la sphère en deux points



$d > R$

Dans ce cas la droite ne coupe pas la sphère



$d = R$

Dans ce cas la droite est tangente à la sphère en un point H

Exercice :9

(S) **est la sphère de centre** $\Omega(0,3,-2)$ **et de rayon** $R=3$

et (Δ) **la droite passant par le point** $\mathbf{A(0,0,1)}$ **et de vecteur directeur** $\overrightarrow{U}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$

1) **Calculer** $\mathbf{d(\Omega,(\Delta))}$. **En déduire que la droite** (Δ) **est tangente à la sphère** (S).
2) **Déterminer la représentation paramétrique de la droite** (Δ) .
3) **Déterminer les coordonnées** H **point d'intersection de** (Δ) **et de** (S).

Bonne Chance