Exercice .1

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :
$A(2,1,1)$, $B(2,-1,1)$,$C(4,3,-3)$ et $\Omega(2,0,1)$ et le vecteur : $\vec{n}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

(P) est le plan passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n}$.

(Δ) est la droite passant par le point Ω et perpendiculaire à (P) .

1) a) Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) est : $x-2y+2z+8=0$. 0,25pts

b) Montrer que la distance entre Ω et le plan (P) est $d=4$. 0,5pts

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) . 0,5pts

b) Montrer les coordonnées du point H intersection de (P) et de (Δ) est le triplet $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3},-\frac{5}{3}\right)$. 0,5pts

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant la relation : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=24$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2-1$. 0,5pts

b) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et de rayon $R=5$. 0,5pts

4) a) Montrer que (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) . 0,25pts

b) Déterminer le rayon du cercle (C) . 0,25pts

c) Déterminer le centre du cercle (C) . 0,25pts

Exercice .2

Soient dans l'espace muni du r-o-n-d $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points $A(2,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,1)$,$E(1,-1,1)$,$F(-2,-1,1)$ et $\Omega(-\frac{1}{2},-1,1)$

1) a) On pose : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ calculer $\vec{n}$. 0,5pts

b) En déduire S_{ABC} l'aire du triangle ABC .

c) Montrer que les points A ,B et C définissent Un plan (P) .

d) Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) est $x+2y+2z-4=0$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P) .

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $EM^2+FM^2=\frac{25}{2}$.

a) Montrer que :

$$EM^2+FM^2=2(x^2+y^2+z^2+x+2y-2z+\frac{9}{2})$$

b) En déduire que (Γ) est la sphère de centre Ω et de rayon $R=2$.

4) a) Montrer que la distance entre le point Ω et le plan (P) est $d=\frac{3}{2}$.

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (Γ) suivant un cercle (C) dont on déterminera le rayon r .

c) Déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (C) .

5) a) Déterminer le volume V_1 de la pyramide ΩABC .

b) Déterminer le volume V_2 du cône de sommet Ω et de base le cercle (C) .

6) Soit la droite (D) définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x= 2k+3/2 \\ y=-\sqrt{2}.k-1 \\ z=\sqrt{2}.k+1 \end{cases} ;\ (k\in \mathbb{R})$$

a) Montrer que la distance entre le point Ω et la droite (D) est $d'=\sqrt{2}$, En déduire que la droite (D) coupe la sphère (Γ) En deux points .

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (D) et (Γ) .

Bon courage