Espace probabilisé finis

1) Univers des possibilités – Evenements :

a) Univers des possibilités:

Considérons l'expérience suivante :
On lance une pièce de monnaie en l'air puis on tire une boule d'un sac contenant 7 boules numérotées de 1 à 7.
Les résultats possibles de cette expériences sont des couples tels que $(P,1)$ و $(F,3)$ و $(P,7)$.
L'ensemble qui contient tous les résultats possibles est nommé « Univers des possibilités » on le note Ω, d'où :
$\Omega=\{(P,1)\ ;\ (P,2)\ ;\ (P,3)\ ;\ (P,4)\ ;\ (P,5)\ ;\ (P,6)\ ;\ (P,7)\ ;\ (F,1)\ ;\ (F,2)\ ;\ (F,3)\ ;\ (F,4)\ ;\ (F,5)\ ;\ (F,6)\ ;\ (F,7)\}$
Le nombre total de possibilité de cette expérience est donc : $\mathrm{Card}\Omega=12$ (On lit "cardinal de Ω")

b) Evénements:

Toute partie de l'univers des possibilités est dit « Evénement »
Dans l'exemple précédent $A=\{((P,2)\ ;\ (P,4)\ ;\ (F,3)\ ;\ (F,4)\}$ est un événement et on a : $\mathrm{Card}A=4$
$B=\{((P,3)\ ;\ (F,1)\}$ et $C=\{((P,5)\}$ et $D=\phi$ et Ω sont aussi des événements .
Et on a : $\mathrm{Card}B=2$ et $\mathrm{Card}C=1$ et $\mathrm{Card}\phi=0$ et $\mathrm{Card}\Omega=12$.

- **L'ensemble vide noté ϕ est nommé : « l'événement impossible »**
- **L'univers Ω est nommé « l'événement certain »**
- **les événements qui contiennent un résultat exactement sont dits « Evénements élémentaires ».**
- **Soit E un événement de Ω, l'événement noté $\overline{E}$ est dit l'événement contraire de E, c'est le complémentaire de E dans Ω .**
- **Les deux événements E et F sont dits disjoints ou Incompatibles si et deulement si leur intersection est vide $E\cap F=\phi$**

2) Définition de la probabilité:

Soit Ω un ensemble fini et non vide.
On appelle propbabilité définie sur l'univers Ω, toute application p de $P(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω) dans l'intervalle $[0,1]$ telle que :

i. $p(\Omega)=1$.

ii. **Pour tous événements incompatibles A et B : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$**

Le triplet $(\Omega;P(\Omega);p)$ est dit univers probabilisé fini.

3) خاصيات :

Soit $(\Omega;P(\Omega);p)$ un espace probabilisé fini tel que : $\begin{array}{l} p:P(\Omega)\to[0,1] \\ \quad A\ \to\ p(A)\end{array}$

Quels que soient les événements A et B on a:

i. $p(\phi)=0$.

ii. $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

iii. $P(\overline{A})=1-P(A)$

iv. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Démonstration:

....

4) Probabilité uniforme: Définition et propriété

On dit que l'univers des possibilités Ω est muni d'une probabilité uniforme p si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, dans ce cas :

- **Quel que soit lévénement élémentaire E : $p(E)=\frac{1}{\text{Card}\Omega}$**
- **En général quel que soit lévénement A : $p(A)=\frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$**

Démonstration:

....

La Variable aléatoire

1) Introduction d'après un exemple:

Un sac contient 10 boules , 5 boules noires, 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire simultanément trois boules du sac . Soit X la variable aléatoire lié au nombre de boules blanches contenues dans chaque tirage.

a) Déterminer les valeurs possibles de X.
b) Déterminer l'événement associé à chacune des valeurs de X.
c) Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution:

a) les valeurs possibles de X sont : $X=0$ و $X=1$ و $X=2$ و $X=3$

b) $X=0$ représente l'événement « **Le tirage ne contient aucune boule blanche** »
$X=1$ représente l'événement « **Le tirage contient exactement une boule blanche** »
$X=2$ représente l'événement « **Le tirage ne contient exactement deux boules blanches** »
$X=3$ représente l'événement « **Le tirage ne contient exactement trois boules blanches** »

c) **La loi de probabilité de X est un tableau contenant deux lignes :**
La première ligne contient les valeurs possibles de X ، et la deuxième contient les probabilités relatives aux valeurs de X. On a :

$$p(X=0)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1\times10}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$$

$$p(X=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5\times10}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$$

$$p(X=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{10\times5}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$$

$$p(X=3)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{10\times1}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$$

D'où on déduit la loi de probabilité de X :

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$	$\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$	$\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$	$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

2) Espérance mathématique , variance et Ecart-type:

- **L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre noté $E(X)$ tel que :**
- $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i p(x_i)$
- **La variance de la variable aléatoire X est le nombre noté $Var(X)$ tel que :**
- $Var(X)=\sum_{i=1}^{i=n}[x_i-E(x)]^2 p(x_i)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p(x_i)-E(x)^2=E(x^2)-E(x)^2$
- **L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre noté $\sigma(X)$ tel que :**

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

Probabilité Conditionnelle

1) Etude d'un exemple:

On lance en l'air une pièce de monnaie puis on lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Considérons les deux événements suivants :
A « la pièce a donné F » et **A « le dé a donné 3 ou 5 »**

a) **Déterminer $Card\Omega$.**
b) **Calculer $p(A)$** et **$p(A)$** et **$p(A\cap B)$.**
c) **Calcler la probabilité de l'événement B , sachant que l'événement A est réalisé (cette probabilité est notée $p(B/A)$ ou $p_A(B)$)**
d) **Calcler la probabilité de l'événement A , sachant que l'événement B est réalisé (cette probabilité est notée $p(A/B)$ ou $p_B(A)$)**
e) **Vérifier que : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$ et $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$.**

Solution:

a) **On a : $Card\Omega=2\times6=12$.**
b) **On a : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$** et **$p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$** et **$p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.**
c) **On a : $p(B/A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$**
d) **On a : $p(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$**
e) **On a : $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$** et **$p(A)=\frac{1}{2}$** et **$p(B)=\frac{1}{3}$** et **$p(A/B)=\frac{1}{2}$** et **$p(B/A)=\frac{1}{3}$**
D'où : $p(A)p(B/A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$ et **$p(B)p(A/B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$**
On en déduit que : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A$ et $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$

2) En général:

A et B deux événements :
$p(A/B)$ est la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.
$p(B/A)$ est la probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé.
On a : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$ et $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$

3) Evénements indépendants:

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si : $p(A\cap B)=p(A)p(B)$
C'est à dire si $p(A/B)=p(A)$ et $p(B/A)=p(B)$.

Les épreuves répétées

1) Etude d'un exemple:

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement « obtenir 3 ou 5 » , on pose : $p=p(A)$

a) Calculer p.

b) On répéte cette experience 5 fois de suite, quelle est la probabilité pour que l'événement soit réalisé trios fois exactement?

Solution:

a) On a : $p(A)=\dfrac{CardA}{Card\Omega}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

b) On a : $p'=\dfrac{5!}{2!3!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=C_5^2p^2(1-p)^3$

2) Propriété:

Soit $n\in IN^*$ et soit S un événement dont la probabilité est p.
Si l'éxpérience est répétée n fois, alors la probabilité pour que S soit réalisée k fois exactement ($0\le k\le n$) est: $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$

Bonne Chance