1) Ensemble des Nombres Entiers Naturels:

L'esemble des entiers naturels : $\mathbf{0}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$; $\mathbf{3}$ .... $\mathbf{100}$; $\mathbf{101}$..... est noté $\mathbb{N}$.
On écrit : $\mathbb{N} = \{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....\ ;\ 100\ ;\ 101\ ;\ ....\ \}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble infini, en effet si $\mathbf{n}$ appartient à $\mathbb{N}$, alors son successeur $\mathbf{n+1}$ appartient aussi à $\mathbb{N}$.

2) Ensemble des Nombres Entiers Relatifs:

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$, il contient tous nombres entiers naturels et leurs opposées

$$\mathbb{Z} = \{\ ....\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.......\ \}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ contient l'ensemble $\mathbb{N}$, On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3) Ensemble des Nombres Décimaux Relatifs:

L'ensemble des nombres décimaux relatifs est noté $\mathbb{D}$, il contient des nombres tels que :

$$-17\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ -6,23475\ ;\ 12,758$$

Cet ensemble contient tous les nombres entiers relatifs , de plus il contient tous les nombres tels que $-6,23475$; $12,758$ c'est-à-dire des nombres qui s'écrivent avec un nombre limité de chiffres après la virgule.

Les deux derniers nombres peuvent s'écrire : $-6,23475 = -\dfrac{62223475}{10^5}$; $12,758 = \dfrac{12758}{10^4}$

on peut généraliser cette écriture à tous les nombres décimaux relatifs
ce qui conduit à la définition suivante de l'ensemble des nombres décimaux relatifs :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

An remarque que si $\mathbf{n=0}$ alors $\dfrac{a}{10^n} = \dfrac{a}{10^0} = a \in \mathbb{Z}$ ،on en déduit que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

4) Ensemble des Nombres Rationnels:

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, il contient les nombres fractionnaires positifs et négatifs .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

On remarque que si $\mathbf{b = 10^n}$ ، alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{10^n} \in \mathbb{D}$ ،on en déduit que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

D'autre part si on essaye d'écrire le nombre $\dfrac{17}{3}$ sous forme d'une écriture décimale on trouve :

$$\frac{17}{3} = 5,6666.....6....$$

Le nombre 6 se répète une infinité de fois après la virgule, cela signifie que le nombre $\dfrac{17}{3}$ n'est décimal, mais il possède une écriture décimale infinie et périodique de période $\mathbf{6}$ (c'est le nombre qui se répète).

Inversement, considérons le nombre $\mathbf{x = 5,6666....6.....}$, on a :

$\begin{cases} x = 5,6666....6..... \\ 10x = 56,666....6..... \end{cases}$ d'où : $9x = 51$ ce que fait : $x = \dfrac{51}{9} = \dfrac{3\times17}{3\times17} = \dfrac{17}{3}$.

on en déduit que:

Tout nombre rationnel possède une écriture décimale infinie et périodique

Par exemple $\frac{17}{3}$ a une écriture périodique de période 6.

5) Ensemble des Nombres Réels:

Le problème des nombres irrationnels est un sujet qui été évoqué 5 siècles avant JC par l'un des militants de l'école pythagoricienne lorsqu'il a posé un problème aux autres adhérants de cette école consistant à déterminer la valeur exacte de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés égaux ont pour longueur 1. Le problème a conduit à la résolution de l'équation $x^2 = 2$.

Equation qui a comme solution positive le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Tout ce qu'on connait de ce nombre c'est sa notation et qu'il vérifie $(\sqrt{2})^2 = 2$

L'ensemble des nombres irrationnels est infini, il contient des nombres tels que $\sqrt{3}$; π ; $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sqrt{5}$

L'ensemble des nombres réels est un ensemble qui contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels on le note $\mathbb{R}$.

Exercice: Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ‘ donc il existe deux entiers a et b premiers entre eux: tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où:

$a^2 = 2b^2$

On en déduit que 2 divise a^2 d'où 2 divise a (1)

Donc a s'écrit $a = 2k$ tel que k est un entier . remplaçons a par $2k$ dans l'expression $a^2 = 2b^2$

on trouve: $b^2 = 2k^2$ de la même façon on démontre que 2 divise b (2)

de (1) et (2) on déduit que 2 est un diviseur commun de a et b ce qui est en contradiction avec l'hypothèse a et b premiers entre eux .On en déduit que l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse .

on vient de découvrir qu'il existe d'autres nombres que les nombres rationnels tel que

$\sqrt{3}$; π ; $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sqrt{2}$

on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Bonne Chance