I. Equations et inéquations du premier degré à une inconnue:

1) Equations:

Une équation du premier degré à une seule inconnue x
Est toute équation de la forme $(x \in \mathbb{R})$; $ax+b=0$. Soit S son l'ensemble solution

Si $a \neq 0$	Si $a=0$	
$ax+b=0 \Leftrightarrow a=-\frac{b}{a}$ $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$	Si $b=0$ $ax+b=0 \Leftrightarrow 0.x=0$ Tout réel est solution, d'où: $S=\mathbb{R}$	Si $b \neq 0$ $ax+b=0 \Leftrightarrow 0.x=b$ Il y a contradiction, donc l'équation n'a pas de solution, d'où : $S=\phi$

2) Inéquations:

Une inéquation du premier degré à une seule inconnue x
Est toute inéquation possédant l'une des formes :
$x \in \mathbb{R}$; $ax+b \geq 0$ ou $x \in \mathbb{R}$; $ax+b>0$ ou $x \in \mathbb{R}$; $ax+b \leq 0$ ou $x \in \mathbb{R}$; $ax+b<0$
Pour déterminer S ensemble solution de l'une des inéquations,on étudie le signe de $P(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$:

Si $: a>0$

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		-	0	+	

Si $: a<0$

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		+	0	-	

II. Système à deux inconnues (méthode de Cramer) :

1) Déterminant :

Le déterminant joue un rôle important dans la solution des systèmes d'équations et dans la géométrie . le déterminant est tout simplement un nombre qu'on écrit sous forme d'un tableau tel que :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc \text{ ; on a par exemple : } \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5)-(7)(-3) = -10+21 = 11$$

2) Méthode de résolution d'un système:

Considèrons le système (S) à deux inconnues x et y suivant : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Pour résoudre ce système , on utilise trois déterminant :

Le déterminant principal : $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Le déterminant en x : $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ **et le Le déterminant en** $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

Si $: D \neq 0$	Si $: D = 0$	
$x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$ Le système admet un couple solution unique	Si $D_x = 0$ et $D_y = 0$ Dans ce cas les deux équations du système sont équivalentes et le système est équivalent à l'équation $ax + by = c$	Si $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ Le système n'a pas de solution

III. Equations et inéquations de second degré:

1) Méthode de résolution :

Essayons de factoriser le polynôme suivant $P(x) = ax^2 + bx + c$ en utilisant les identités remarquables.

En général, on a : $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + u^2$

d'où : $u^2 + 2uv = (u+v)^2 - v^2 = (u+v-v)(u+v+v) = u(u+2v)$

d'où :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$P(x) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$

D'où : $$P(x) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Premier cas : $\Delta \geq 0$ on pose : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$P(x) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

On en déduit la forme canonique de $P(x)$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$-\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

Deuxième cas : $\Delta = 0$ on pose : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ $P(x) = a\left((x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{0}{4a^2}\right) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

On en déduit la forme canonique de $P(x)$: $f(x) = a(x - x_0)^2$

x	$-\infty$		x_0		$-\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

Troisième cas : $\Delta < 0$ $f(x) = a\left((x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left((x+\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)$

Dans ce cas, on a $\Delta < 0$ d'où $-\Delta > 0$ donc $\left((x+\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ on en déduit que $P(x) = 0$ n'a pas de solutions et que $f(x)$ est de même signe que a.

On en déduit la forme canonique de $P(x)$: $P(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = a\left((x+\dfrac{b}{2a})^2 + \alpha\right)$ avec $\alpha > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $-\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a

2) Conclusion générale :

Signe du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$			
On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$			
Signe de Δ	Solutions de $P(x) = 0$	Signes de $P(x)$	Forme canonique de $P(x)$
$\Delta \geq 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	Signe de a à l'extérieur des racines Signe contraire de a à l'intérieur des racines	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	Signe de a pour tout $x \neq x_0$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	Pas de solutions	Signe de a pour tout $x \in IR$	$f(x) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \alpha\right)$ مع $\alpha \phi 0$.

3) Relations entre les racines de l'équation :

Considèrns l'équation de second degré : $ax^2 + bx + c = 0$
si $\Delta > 0$ cette équation admet deux solutions différentes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases}$$

4) Système particulier :

Considèrons le système $:(I): \begin{cases} x + y = S & :(1) \\ x.y = P & :(2) \end{cases}$

On a successivement :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x & :(1) \\ x.(S - x) = P & :(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x & :(1) \\ -x^2 + Sx = P & :(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x & :(1) \\ x^2 - Sx + P = 0 & :(2) \end{cases}$$

Ainsi on remarque que la résolution du système $(I): \begin{cases} x + y = S & :(1) \\ x.y = P & :(2) \end{cases}$

Se réduit à la résolution de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

Bonne Chance