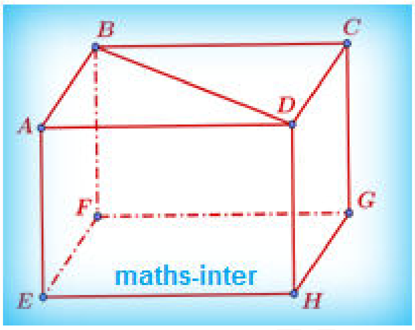
1) Exemples et définitions:

La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle dont les dimensions $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$ varient en fonction d'une variable x telles que :

$$h(x)=2x-3 \;;\; L(x)=3x+2 \;;\; l(x)=x-1$$



a) Remarquons que $h(x)$; $L(x)$; $l(x)$ هي دوال sont des fonctions sous la forme $f(x)=ax+b$ on dit que ce sont des fonctions polynômes du premier degré.

On rappelle que leur représentations graphiques sont des droites dont l'ordonnée à l'origine est b et et dont le coefficient directeur est a.

b) soit $S(x)$ la surface de la base et $V(x)$ le volume du parallélépipède, on a :

$$V(x)=S(x)\times h(x) \;;\; S(x)=l(x)\times L(x)$$

Après calcul, on trouve : $\begin{cases} S(x)=(x-1)\times(3x+2)=3x^2-x-2 \\ V(x)=(3x^2-x-2)\times(2x-3)=6x^3-11x^2-x+6 \end{cases}$

On remarque que $S(x)$ est une fonction de la forme $S(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ ،on dit S est une fonction polynôme de second degré , et que $V(x)$ est une fonction de la forme $V(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec $a\neq 0$ ، on dit V est une fonction polynôme de troisième degré .

c) compléter le tableau suivant:

Valeurs de x	2	3	...	...
$l(x)$	$l(2)=1$	$l(3)=....$	$l(...)=3$	$l(...)=....$
$L(x)$	$L(2)=8$	$L(3)=...$	$L(...)=...$	$L(...)=...$
$h(x)$	$h(2)=1$	$h(3)=...$	$h(...)=...$	$h(...)=4$
$S(x)$	$S(2)=8$	$S(3)=...$	$S(...)=...$	$S(...)=...$
$V(x)$	$V(2)=8$	$V(3)=...$	$V(...)=...$	$V(...)=...$

d) Définition générale:

Un polynôme (ou fonction polynôme) est une expression de la forme :

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+...+a_2X^2+a_1X+a_0$$

Les nombres : a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; ... ; a_2 ; a_1 ; a_0 sont les coefficients du polynôme P.
Le polynôme P est nul si tous ses coefficients sont nuls $P(X)=0$.

e) Degré d'un polynôme non nul:

Un polynôme (ou fonction polynôme) est une expression de la forme :

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+...+a_2X^2+a_1X+a_0 \quad \text{avec } a_n\neq 0$$

Le nombre a_n est le dernier coefficient non nul **du polynôme P , l'indice n de ce coefficient est le degré de P, on écrit : $d^0P=n$.**
Le polynôme nul n'a pas de degré .

2) Egalité de deux polynômes:

Les deux pôlynomes $P(X)$ et $Q(X)$ sont égaux si et seulement si , ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

$$P(X)=Q(X)$$

Signifie que

$$d^0P=d^0Q=n \text{ et } a_n=b_n \text{ et } a_{n-1}=b_{n-1} \text{ et } \dots \text{ et } a_2=b_2 \text{ et } a_1=b_1 \text{ et } a_0=b_0$$

3) Opérations sur les polynômes:

Considèrons les polynômes suivants:

$$Q(x)=3x^2+2x-3 \ ; \quad P(x)=-2x^3+5x^2-3x+2$$

a) Déterminer les degrés des polynômes : $Q(x)$; $P(x)$.

On a : $d^0Q=\dots$; $d^0P=\dots$

b) Calculer $s(x)=Q(x)+P(x)$ et donner le degré de $s(x)$? Remarques !?

On a :

$s(x)=Q(x)+P(x)=$ ....

$s(x)=$ ....

On remarque que : $d^0(P+Q)\le \sup(d^0P,d^0Q)$

c) Calculer $p(x)=Q(x)\times P(x)$ et donner le degré de $p(x)$? Remarques !?

On a :

$p(x)=Q(x)\times P(x)=$ ....

$p(x)=$ ....

$p(x)=$ ....

On remarque que : $d^0(P\times Q)=d^0P\times d^0Q$

<u>En général :</u> $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes non nuls , on a:

$$d^0(P\times Q)=d^0P\times d^0Q$$

$$d^0(P+Q)\le \sup(d^0P,d^0Q)$$

d) Division Euclidienne:

Soient les polynômes : $B(x)=x^2+2x-3$; $A(x)=7x^4-2x^3+5x^2-3x+2$

$7x^4-2x^3+5x^2-3x+2$	x^2+2x-3
	$Q(x)=$ ....

On a $A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$ avec $0\le d^0(R)\le d^0Q$

En général:
Quels que soient les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ avec $B(X) \neq 0$.
Il existe deux polynômes uniques $R(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq d^0(R) \leq d^0 B$$

4) جدر حدودية :

Soit $P(X)$ un polynôme tel que $d^0 P \geq 1$, le nombre réel a est dit Racine du polynôme $P(X)$ si et seulement si $P(a) = 0$, autrement dit a est solution de l'équation $P(X) = 0$

Exercice q'application : (voir la correction sur le cahier des exercices)

On considère les polynômes suivants : $g(x) = f(x) + (x^2 - 1) - 3(x - 1)$; $f(x) = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}$

1) Calculer $f(1)$ et $f(\frac{1}{3})$ ،en déduire $g(1)$ et $g(\frac{1}{3})$
2) Développer $g(x)$ et $f(x)$ et donner les degré de g et f .
3) Factoriser $f(x)$, en déduire une factorisation de $g(x)$
4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, en déduire les racines du polynôme $f(x)$.
5) Détermminer les racines du polynôme $g(x)$

5) Propriété:

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel.
Le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$

Démonstration :
D'après le théorème de la division euclidienne , il existe deux polynômes $R(x)$ et $Q(x)$ tels que : $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R(x)$ avec $0 \leq d^0(R) < d^0(x - a) = 1$ ce qui fait $d^0(R) = 0$
On en déduit que le polynôme $R(x)$ est constant, d'où $R(x) = R(a)$.
Or $P(a) = (a - a) \times Q(a) + R(a) = R(a)$, d'où : $R(x) = P(a)$
Ce qui fait $P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$.

Suppose que $P(x)$ est divisible par $x - a$, alors $P(x) = (x - a) \times Q(x)$, d'où : $P(a) = 0$
Inversement supposons que $P(a) = 0$, donc $P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a) = (x - a) \times Q(x)$
D'où $P(x)$ est divisible par $x - a$

Bonne Chance