

## I. Introduction à la notion de fonction:

### 1) Fonctions polynômes :

Nous rappelons qu'une fonction linéaire s'écrit sous la forme  $f(x) = ax$ , sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère et qu'une fonction affine s'écrit sous la forme  $f(x) = ax + b$ , sa représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

Les fonctions affines et linéaires sont des fonctions polynômes du premier degré.

La fonction définie par  $f(x) = 3x^2 + x - 3$  est une fonction polynôme de second degré.

En général toute fonction dont l'expression est un polynôme de degré  $n$  est dite fonction polynôme de degré  $n$ .

Ainsi la fonction définie par  $f(x) = -5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 7$  est une fonction polynôme de degré 4.

### 2) Fonctions rationnelles :

Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression est de la forme  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions polynômes.

A titre d'exemple  $f(x) = \frac{3x^2 + x - 3}{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1}$  est une fonction rationnelle.

### 3) Fonctions irrationnelles :

Une fonction irrationnelle est une fonction dont l'expression contient une racine.

A titre d'exemple  $f(x) = \frac{3x^2 + \sqrt{x-3}}{2x-1}$  est une fonction irrationnelle.

### 4) Fonctions trigonométrique :

Une fonction trigonométrique est une fonction dont l'expression contient l'une au moins des fonctions  $\cos$  ou  $\sin$  ou  $\tan$ .

A titre d'exemple  $f(x) = 3 \cos(2x - 3) - \tan x$  est une fonction trigonométrique

### 5) Définition générale d'une fonction :

Toute expression  $f(x)$  qui varie en fonction d'une variable réelle  $x$  appelée fonction de variable réelle  $x$ .

### 6) Remarque :

Les exemples précédent ne constitue qu'une partie presque négligeable devant l'ensemble de toutes les fonctions numériques.

## II. Concepts en relation avec les fonctions:

### 1) Image et antécédent :

Soit la fonction  $f$  telle que  $f(x) = 3x^2 + x - 3$

On a  $f(-2) = 12 - 2 - 3$  d'où  $f(-2) = 7$

On dit que le nombre 7 est l'image de  $-2$ , et que le nombre  $-2$  est l'antécédent de 7 par  $f$ .

### 2) Domaine de définition :

Le domaine de définition d'une fonction  $f$  est l'ensemble de nombres réels qui possèdent une image par cette fonction .

Le domaine de définition de la fonction  $f$  est noté  $D_f$  .

Soit par exemple la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \frac{5x-10}{x^2+x-2}$

Après calcul, on trouve  $f(3) = \frac{1}{2}$  et  $f(0) = 5$  et  $f(-1) = \frac{15}{2}$  , donc les nombres 3 et 0 et -1 ont chacun une image par  $f$  , donc ils appartiennent à  $D_f$  .

Mais si on essaye de calculer l'image de 1 , on trouve  $f(1) = \frac{-5}{0}$  , وهذا غير ممكن , ce qui n'a pas de sens donc 1 n'a pas d'image par  $f$  , donc 1 n'appartient pas à  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  .

Pour déterminer le domaine de définition de cette fonction, on écrit:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

Après la résolution de l'équation :  $x^2 + x - 2 = 0$  on trouve:

$$x = 1 \text{ ou } x = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

D'où :  $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$  , en utilisant les intervalles :  $D_f = ]-\infty ; -2[ \cup ]-2 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty [$

Considérons maintenant la fonction  $g$  telle que :  $g(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Pour déterminer le domaine de définition de cette fonction, on écrit:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 > 0\}$$

Après la résolution de l'équation :  $x^2 + x - 2 = 0$  on trouve:

$$x = 1 \text{ ou } x = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

D'le tableau de signes du polynôme :  $P(x) = x^2 + x - 2$

x	$-\infty$	-2	1	$-\infty$	
P(x)	+	0	-	0	+

On en déduit :  $D_g = ]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty [$

### Détermination du domaine de définition:

Engénéral, au moins pour les fonctions habituelles , c'est la forme de l'expression de  $f$  qui détermine son domaine de définition  $D_f$  :

- Si  $f(x)$  s'écrit sous forme de rapport :  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

alors  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$

Dans ce cas la détermination de  $D_f$  dépend des solutions de l'équation :  $Q(x) = 0$ .

- Si  $f(x)$  s'écrit sous forme de rapport :  $f(x) = P(x) + \sqrt{Q(x)}$

alors  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

Dans ce cas la détermination de  $D_f$  dépend des solutions de l'équation :  $Q(x) > 0$ .

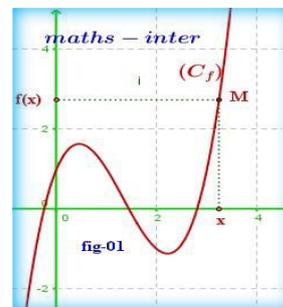
### 3) La représentation graphique d'une fonction :

La représentation graphique ou courbe d'une fonction  $f$  , dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

est l'ensemble noté  $(C_f)$ , des points  $M(x;f(x))$  tel que ,  $x \in D_f$ .

On peut écrire :  $(C_f) = \{M(x;f(x)) / x \in D_f\}$

Par exemple la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.



### III. Fonction paire – fonction impaire – fonction périodique:

#### 1) Fonction paire :

- **Définition:**

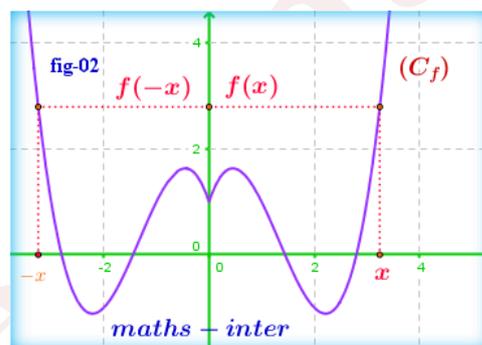
Une fonction  $f$  est paire si et seulement si :

Quel que soit  $x \in D_f$ , alors :

$$-x \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

- **Propriété:**

Une fonction  $f$  est paire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



#### 2) Fonction impaire :

- **Définition:**

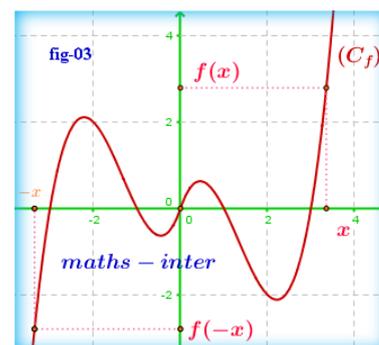
Une fonction  $f$  est impaire si et seulement si :

Quel que soit  $x \in D_f$ , alors :

$$-x \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

- **Propriété:**

Une fonction  $f$  est impaire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.



#### 3) Fonction périodique :

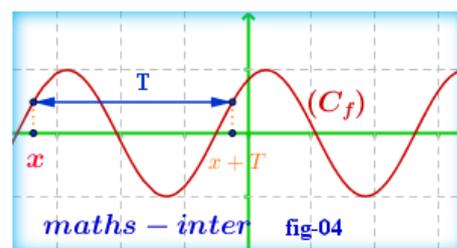
- **Définition:**

Une fonction  $f$  est périodique de période  $T$  si et seulement si , quel que soit  $x \in D_f$ , alors :

$$x + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

- **Propriété:**

Une fonction  $f$  est périodique de période  $T$  si et seulement si sa courbe est exactement la même sur tout intervalle de longueur  $T$ .



#### 4) Application :

On considère les fonctions  $f$  ;  $g$  et  $h$  telle que :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4} ; \quad g(x) = \frac{3x^3 - 4x}{x^2 + 2} \quad \text{et} \quad h(x) = 5\cos(4x) - 1$$

- Déterminer  $D_f$  ;  $D_g$  et  $D_h$ .
- Etudier la parité de chacune des fonctions  $f$  ;  $g$  et  $h$ .
- Montrer que  $h$  est périodique de période  $T = \frac{\pi}{2}$ .

#### IV. Variations d'une fonction:

##### 1) Fonction croissante :

- Définition :**

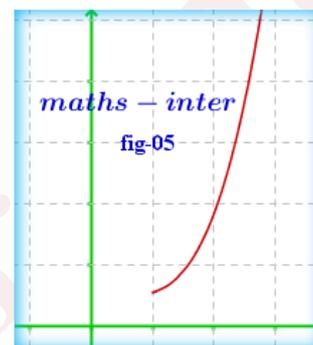
$f$  est croissante sur l'intervalle  $I$  , signifie que «quels que soient  $x \in I$  et  $y \in I$ .

Si  $x < y$  alors  $f(x) < f(y)$

- Propriété:**

$f$  est croissante sur l'intervalle  $I$  , signifie que «quels que

soient  $x \in I$  ;  $y \in I$  et  $x \neq y$  :  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$



##### 2) Fonction décroissante :

- Définition :**

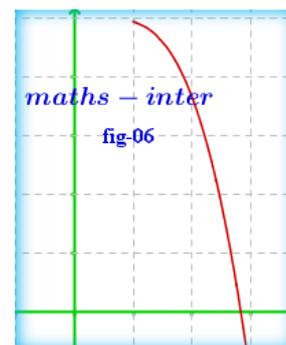
$f$  est décroissante sur l'intervalle  $I$  , signifie que «quels que soient  $x \in I$  et  $y \in I$ .

Si  $x < y$  alors  $f(x) > f(y)$

- Propriété:**

$f$  est décroissante sur l'intervalle  $I$  , signifie que «quels

que soient  $x \in I$  ;  $y \in I$  et  $x \neq y$  :  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$



##### 3) Propriétés:

- Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont croissantes sur  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}_-^*$  , alors:
  - $f + g$  est croissante su  $I$  ;  $\alpha \times f$  est croissante su  $I$  et  $\beta \times f$  est décroissante su  $I$  .
- Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont décroissantes sur  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}_-^*$  , alors:
  - $f + g$  est décroissante su  $I$  ;  $\alpha \times f$  est décroissante su  $I$  et  $\beta \times f$  est croissante su  $I$  .
- Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont croissantes et strictement positives sur  $I$  , alors:
  - $f \times g$  est croissante su  $I$  ;  $\frac{1}{f}$  est décroissante su  $I$  .

#### V. Fonction majorée – fonction minorée:

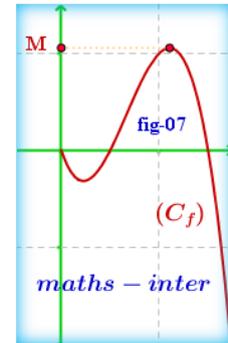
##### 1) Fonction majorée –valeur maximale :

- **Fonction majorée :**

$f$  est majorée par le nombre  $M$  sur l'intervalle  $I$  , signifie que 'quels que soient  $x \in I$  :  $f(x) \leq M$

- **Valeur maximale:**

$M$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  , signifie que ' $f$  est majorée par  $M$  et qu'il existe un élément  $a$  de  $I$  tel que :  $f(a) = M$



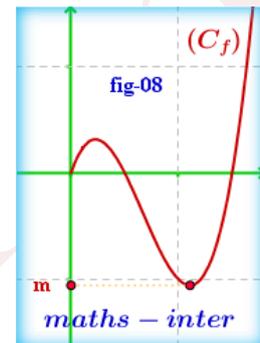
## 2) **Fonction majorée –valeur maximale :**

- **Fonction minorée :**

$f$  est minorée par le nombre  $m$  sur l'intervalle  $I$  , signifie que 'quels que soient  $x \in I$  :  $m \leq f(x)$

- **Valeur minimale:**

$m$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  , signifie que ' $f$  est minorée par  $m$  et qu'il existe un élément  $a$  de  $I$  tel que :  $f(a) = m$



Bonne Chance