I. Introduction générale:

Les fonctions usuelles sont des fonctions simples et typiques dont les propriétés géométriques dépendent de leur formes et des leurs paramètres . Dans ce cours nous allons voir quelques unes de ces fonctions , nous citons les fonctions affines , les fonctions polynômes de second degré , les fonctions homographiques, quelques fonctions irrationnellles simples et les fonctions trigonométriques de base.

Pour chacune de ces fonctions f ; on pose : $T_f = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ tels que x et y deux élèments différents du domaine de définition D_f de f .

On désigne par (C_f) la coure de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II. La fonction Affine :

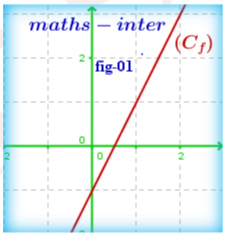
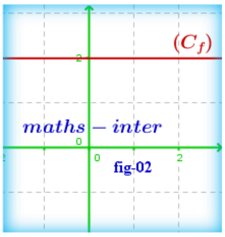
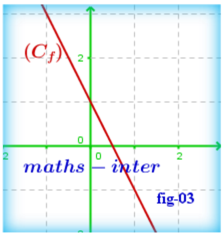
Cette fonction s'écrit : $f(x)=ax+b$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax+b)-(ay+b)}{x-y} = \frac{ax+b-ay-b}{x-y} = \frac{a(x-y)}{x-y} = a$$

Les variations de f dépendent de a , coefficient de la fonction de f , d'où le résumé suivant :

	a > 0	**a = 0**	**a < 0**
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f > 0$ f croissante sur IR $\begin{array}{cccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & \end{array}$	$T_f = 0$ f constante sur IR $\begin{array}{cccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \rightarrow & \end{array}$	$T_f > 0$ f décroissante sur IR $\begin{array}{cccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & \end{array}$
Exemple De Représentation graphique	$f(x)=2x-1$ $f(0)=-1$ et $f(1)=1$ 	$f(x)=0x+2$ $f(0)=2$ et $f(1)=2$ 	$f(x)=-2x+1$ $f(0)=1$ et $f(1)=-1$ 

III. Fonction polynôme de second degré :

la fonction s'écrit : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.

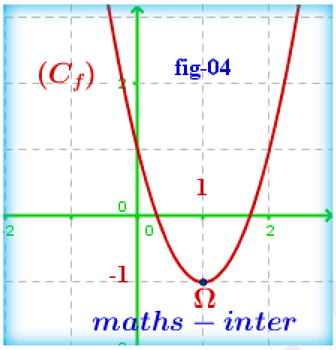
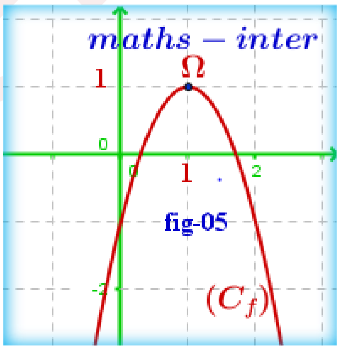
Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax^2+bx+c)-(ay^2+by+c)}{x-y} = \frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{x-y} = a(x+y)+b$$

d'où $$: T_f = a(x+y)+b = a(x+y+\frac{b}{a}) = a\left((x+\frac{b}{2a})+(y+\frac{b}{2a})\right)$$

On en déduit que l'expression $\left((x+\frac{b}{2a})+(y+\frac{b}{2a})\right)$ est négative sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right[$ et positive sur $\left]-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$

Les variations de f dépendent de a , d’où le résumé suivant :

<table>
<tr><th></th><th>a > 0</th><th>a < 0</th></tr>
<tr><td>Tableau
de
Variations
De
La fonction f</td><td>$T_f < 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$
$T_f > 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$
D’où le tableau de variations de f sur IR
$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{b}{2a} & +\infty \\ \hline f(x) & \searrow & f(-\frac{b}{2a}) & \nearrow \end{array}$
(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})\right)$
et orientée vers le haut</td><td>$T_f < 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$
$T_f > 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$
D’où le tableau de variations de f sur IR
$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{b}{2a} & +\infty \\ \hline f(x) & \nearrow & f(-\frac{b}{2a}) & \searrow \end{array}$
(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})\right)$
et orientée vers le bas</td></tr>
<tr><td>Exemple
De
Représentation
graphique</td><td>$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
$f(1) = -1$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 7$

 </td><td>$f(x) = -2x^2 + 4x - 1$
$f(1) = -1$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 7$

 </td></tr>
</table>

IV. Fonction homographique :

la fonction s’écrit : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $\Delta = ad - bc \neq 0$

On a $D_f = IR - \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

Le taux d’accroissement est : $T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d}}{x-y}$

Après simplifiactions de calcul, on trouve : $T_f = \frac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{\Delta}{(cx+d)(cy+d)}$

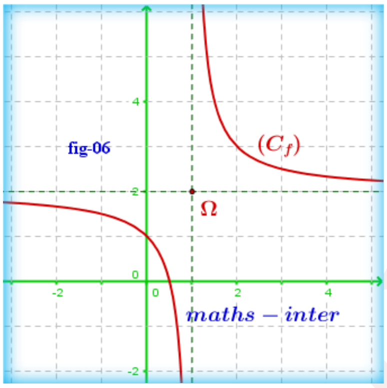
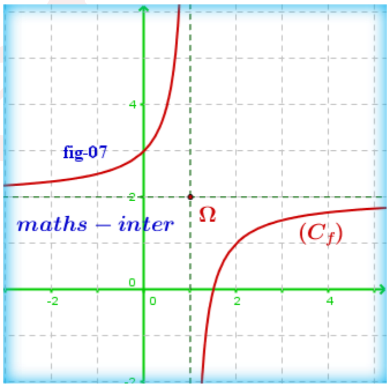
L’expression $(cx+d)(cy+d)$ est positive sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

D’où les variations de f dépendent de $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Donc si $\Delta > 0$, alors f est croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

et si $\Delta < 0$, alors f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

d’où le résumé :

	$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$	$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f > 0$ sur les deux intervalles: $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & -\frac{d}{c} & +\infty \\ \hline f(x) & \nearrow & \\| & \nearrow \end{array}$ (C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$ Et d'asymptôtes: $(\Delta_1): x = \frac{a}{c}$ et $(\Delta_2): y = -\frac{d}{c}$	$T_f < 0$ sur les deux intervalles: $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & -\frac{d}{c} & +\infty \\ \hline f(x) & \searrow & \\| & \searrow \end{array}$ (C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$ Et d'asymptôtes: $(\Delta_1): x = \frac{a}{c}$ et $(\Delta_2): y = -\frac{d}{c}$
Exemple De Représentation graphique	$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ $f(3) = 5/2$ et $f(2) = 3$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 3/2$  	$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ $f(3) = 3/2$ et $f(2) = 1$ et $f(0) = 3$ et $f(-1) = 5/2$ 

V. La fonction polynôme de 3ème degré ax^3 : f s'écrit : $f(x) = ax^3$ a $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{ax^3 - ay^3}{x-y} = \frac{a(x^3-y^3)}{x-y} = \frac{a(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}$$

d'où $: T_f = a(x^2+xy+y^2)$

On en déduit que l'expression x^2+xy+y^2 est positive sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$

Les variations de f dépendent de a, d'où le résumé suivant :

	a > 0	**a < 0**
Tableau de Variations De	$T_f > 0$ sur IR D'où le tableau de variations de f sur IR $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$	$T_f > 0$ sur IR ومنه جدول تغيرات الدالة f على IR $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$

La fonction f

f(x)	↗	0	↗

On remarque que (C_f) est sumétrique
Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

f(x)	↗	0	↗

On remarque que (C_f) est sumétrique
Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

Exemple De Représentation graphique

$f(x)=2x^3$

$f(1)=2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=-2$

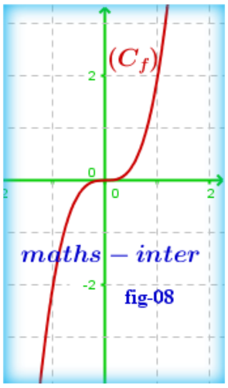


fig-08

$f(x)=-2x^3$

$f(1)=-2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=2$

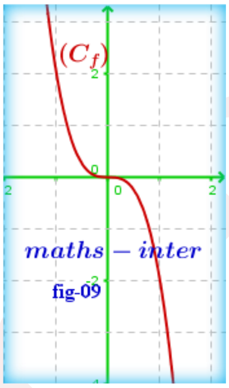


fig-09

VI. Fonctions irrationnelles simples : $\pm\sqrt{x-a}$ و $\pm\sqrt{a-x}$:

1) Considèrons les fonctions : $f_1(x)=\sqrt{x-a}$ et $f_2(x)=-\sqrt{x-a}$ avec $a\in\mathbb{R}$

On a $D_{f_1}=D_{f_2}=[a;\ +\infty[$

Le taux d'accroissement de f_1 est:

$$T_{f_1}=\frac{f_1(x)-f_1(y)}{x-y}=\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{y-a}}{x-y}=\frac{(x-y)}{(x-y)(\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a})}=\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}}>0$$

d'où :

f_1 est croissante sur $[a;\ +\infty[$, et puisque $f_2(x)=-f_1(x)$ alors f_2 est décroissante sur $[a;\ +\infty[$

2) Considèrons les fonctions : $g_1(x)=\sqrt{a-x}$ et $g_2(x)=-\sqrt{a-x}$ avec $a\in\mathbb{R}$

On a $D_{g_1}=D_{g_2}=]-\infty;\ a]$

Le taux d'accroissement de g_1 est:

$$T_{g_1}=\frac{g_1(x)-g_1(y)}{x-y}=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{a-y}}{x-y}=\frac{-(x-y)}{(x-y)(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y})}=\frac{-1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}}<0$$

d'où :

g_1 est décroissante sur $]-\infty;\ a]$, et puisque $g_2(x)=-g_1(x)$ alors g_2 est croissante sur $]-\infty;\ a]$

D'où le résumé suivant :

$f_1(x)=\sqrt{x-a}$ et $f_2(x)=-\sqrt{x-a}$

Tableau de Variations

Le tableau de variations de f_1 sur $[a;\ +\infty[$

x	a		+∞
$f_1(x)$		↗	

Le tableau de variations de f_2 sur $[a;\ +\infty[$

$g_1(x)=\sqrt{a-x}$ et $g_2(x)=-\sqrt{a-x}$

Le tableau de variations de g_1 sur $[a;\ +\infty[$

x	−∞		a
$g_1(x)$		↘	

Le tableau de variations de g_2 sur $[a;\ +\infty[$

De La fonction f

x	a	$+\infty$
$f_2(x)$	↘	

On remarque $(C_{f_1})\cup(C_{f_2})$ est une parabolede sommet $A(a;\ 0)$
D'axe (Ox) et orientée vers la droite

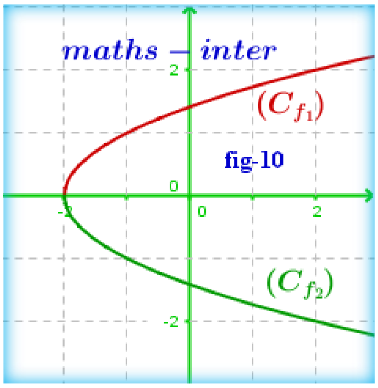
x	$-\infty$	a
$g_2(x)$	↗	

On remarque $(C_{g_1})\cup(C_{g_2})$ est une parabolede sommet $A(a;\ 0)$
D'axe (Ox) et orientée vers la gauche

Exemple De Représentation graphique

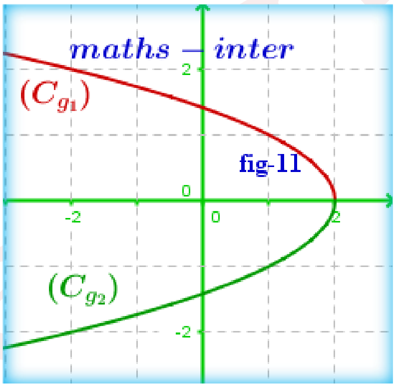
$f_1(x)=\sqrt{x-a}$ et $f_2(x)=-\sqrt{x-a}$

$f(1)=2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=-2$



$g_1(x)=\sqrt{a-x}$ et $g_2(x)=-\sqrt{a-x}$

$f(1)=-2$ et $f(0)=0$ et $f(-1)=2$

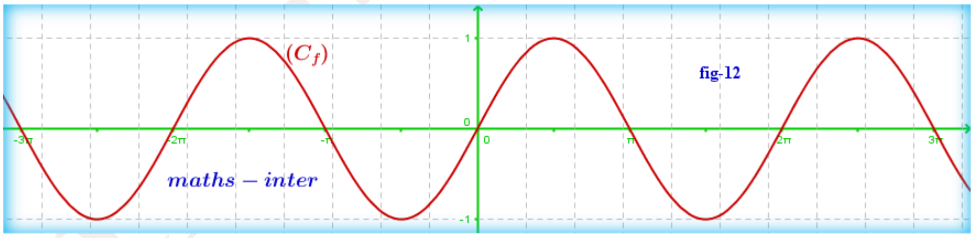


VII. Les fonctions trigonométriques :

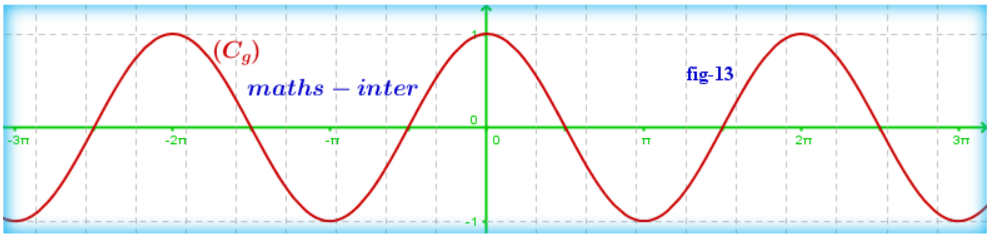
Considérons les fonctions f ;g et h tels que : $f(x)=\sin x$; $g(x)=\cos x$ et $h(x)=\tan x$

Les courbes de ces fonctions sont tracées, en se basant sur le cercle trigonométrique :

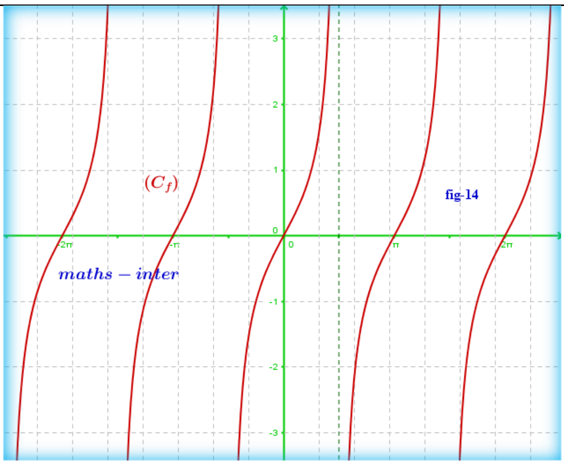
$f(x)=\sin x$



$g(x)=\cos x$



$h(x)=\tan x$



Bonne Chance