I. Ensemble des nombres entiers naturels:

L’ensemble des nombres entiers naturels est noté **IN** , On écrit: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
L’ensemble IN est un ensemble infini, en effet si $\mathbf{n}$ appartient à IN ،alors son successeur $\mathbf{n+1}$ appartient aussi à IN.

II. La division Euclidienne:

1) Exemples :

Compléter le tableau suivant:

Division Euclidienne	Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
$17 = 5\times 3 + 2$	**17**	**5**	**3**	**2**
$658 = 13\times\ldots+\ldots$				
$185 = \ldots\times\ldots+\ldots$	185	13		
$\ldots. = \ldots\times\ldots+\ldots$		8	29	4

2) Propriété :

Quel que soit l’entier naturel a et quel que soit l’entier naturel non nul b,
Il existe deux entiers naturels uniques $\mathbf{q}$ et $\mathbf{r}$ tels que $\mathbf{a = bq + r}$: et $\mathbf{0 \leq r \leq b-1}$
Cette opération est appelée, la division Euclidienne de l’entier naturel $\mathbf{a}$ par l’entier naturel $\mathbf{b}$ l’entier $\mathbf{q}$ est le quotient et l’entier $\mathbf{r}$ est le reste de la division euclidienne de $\mathbf{a}$ par . $\mathbf{b}$

3) Application :

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre **12357** par **113** .
Réponse : ………………………………………………………………………
Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d’un nombre donné par 7 ?
Réponse : ………………………………………………………………………
Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d’un nombre donné par 7 ?
Réponse : ………………………………………………………………………
Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d’un nombre donné par 2 ? comment on appelle ces nombres?
Réponse : ………………………………………………………………………
………

III. Les nombres pairs et les nombres impairs:

1) Exemples:

Les nombres tels que **0 ; 2 ; 4 ; 6 ; ……** sont des nombres pairs et les nombres tels que **1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ……** sont des nombres impairs.

2) En général:

a est un entier naturel.
a est un nombre pair si et seulement si $\mathbf{a = 2k}$ tel que $\mathbf{k \in \mathbb{N}}$
a est un nombre impair si et seulement si $\mathbf{a = 2k+1}$ tel que $\mathbf{k \in \mathbb{N}}$

3) Opérations sur les nombres et impairs:

La somme et la différence de deux nombres entiers de même parités est un entier............	La somme et la différence de deux nombres entiers de parités différentes est un entier ....
Le produit de deux ou plusieurs entiers est pair si et seulement si, l'un de ces nombre au moins est …………	Le produit de deux ou plusieurs entiers est impair si et seulement si, tous ces nombre sont …………

4) Applications :

$\mathbf{n}$ est un entier naturel, déterminer, en justifiant la réponse, la parité des entiers suivants :

$\mathbf{a = 2(n - 1) + 17}$ Réponse : ....

$\mathbf{b = n(n+1)}$ Réponse : ....

$\mathbf{c = 4n^2 - 4n + 1}$ Réponse : ....

IV. Multilples et diviseurs:

1) Exemples:

Les nombres tels que $\mathbf{0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;}$ **......** s'écrivent sous la forme .... , ce sont des muliples de ....

Les nombres tels que $\mathbf{0\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;}$ **......** s'écrivent sous la forme .... , ce sont des muliples de ....

Les nombres tels que $\mathbf{0\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ 21\ ;}$ **......** s'écrivent sous la forme .... , ce sont des muliples de ....

2) Définition:

$\mathbf{a}$ est un entier et $\mathbf{p}$ est un entier naturel non nul.
($\mathbf{a}$ est un multiple de $\mathbf{p}$) signifie ($\mathbf{p}$ est un diviseur de $\mathbf{a}$) signifie que ($\mathbf{a = p.k}$ tel que) $\mathbf{k \in IN}$

3) Applications :

a) Déterminer la forme générale d'un entier multiple de $\mathbf{13}$, en déduire les multiples de $\mathbf{13}$ strictement compris entre 27 et 253

Réponses :

....

....

....

b) Déterminer $\mathbf{D(7)\ ;\ D(72)\ ;\ D(45)\ ;\ D(12)}$ l'ensemble des diviseurs de $\mathbf{7\ ;\ 72\ ;\ 45\ ;\ 12}$ successivement .

Réponses:

$\mathbf{D(45) = \{1\ ;\quad ;\quad ;\quad ;\quad ;\ 45\}}$; $\mathbf{D(12) = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6;\ 12\}}$

$\mathbf{D(7) = \{\qquad\}}$; $\mathbf{D(72) = \{1\ ;\ 2\ ;\quad ;\quad ;\quad ;\quad ;\quad ;\quad ;\quad ;\ 36\ ;\ 72\}}$

4) Opérations sur les diviseurs et multiples :

Propriété générale:

Si l'entier $\mathbf{c}$ est un diviseur commun des deux entiers $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$,alors $\mathbf{c}$ divise $\mathbf{a+b}$ et $\mathbf{a-b}$ et en géneral, $\mathbf{c}$ divise toute combinaison linéaire de a et b c'est-à-dire tout nombre de la forme $\mathbf{ka+mb}$ quels que soient les entiers $\mathbf{k}$ et. $\mathbf{m}$

V. PGDC et PPMC:

1) Les nombres premiers entre eux:

Les nombres **12** et **35** n'ont qu'un seul diviseurs commun qui est **1** .
On dit que ces les nombres **12** et **35** sont premiers entre eux et que leur plus grand diviseur commun est égal à **1** , on écrit $\mathbf{12 \wedge 35 = 1}$:

Définition:

a et **b** deux entiers naturels.
On dit que **a** et **a** sont premiers entre eux si et seulement si le seul diviseur commun de **b** et **b** est l'entier 1 .
on écrit $\mathbf{a \wedge b = 1}$:

2) Le plus grand diviseur commun

Considérons les nombres **42** et **36** , on a:
$M(36) = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; 6 \ ; \ 9; \ 12 \ ; \ 18, 36\}$; $D(42) = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 6 \ ; \ 7 \ ; \ 14 \ ; \ 21 \ ; \ 42\}$
Les diviseurs commun de **42** et **36** sont . **1 ; 2 ; 3 ; 6** Donc **42** est le plus grand diviseur commun de **6** et **36**
on écrit $PGCD(42 \ ; \ 36) = 6$ أو $42 \wedge 36 = 6$:

Propriété générale:
a et b deux entiers naturels.
Le plus grand diviseur commun de **a** et **b** est noté $a \wedge b$: ou $pgcd(a,b)$ et on a:

- $(d = a \wedge b)$ signifie qu'il existe deux entiers $\mathbf{a'}$ et $\mathbf{b'}$ premiers entre eux : $\begin{cases} a = d.a' \\ b = d.b' \end{cases}$
- Tout diviseur commun de **a** et **b** est un diviseur de leur pgdc $\mathbf{d = a \wedge b}$

3) Le plus petit multiple commun:

Considérons les entiers naturels **12** et **20** , on a:
$M(20) = \{0 \ ; \ 20 \ ; \ 40 \ ; 60 \ ; \ 80; \ 100 \ ; \ ... \}$; $M(12) = \{0 \ ; \ 12 \ ; \ 24 \ ; \ 36 \ ; \ 48 \ ; \ 60 \ ; \ 72 \ ; \ 84; ... \}$
Les nombres **12** et **20** ont une infinités de multiples communs, mais le plus petit de ces multiples communs est **60** .On dit que **12** commun de multiple petitest le plus **60** et. **20**
on écrit $\mathbf{PPMC(12 \ ; \ 20) = 60}$ أو $\mathbf{12 \vee 20 = 6}$:

Propriété générale:
a et b deux entiers naturels.
Le plus petit multiple commun de **a** et **b** est noté $\mathbf{a \vee b}$: ou $ppmc(a,b)$ et on a:

- Tout multiple commun de **a** et **b** est un multiple de leur ppmc $\mathbf{m = a \vee b}$

VI. Les nombres premiers:

1) Nombres premier :

Les nombres tels que **2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; ......** possèdent chacun deux diviseurs exactement dans **IN** , On dit que ce sont des nombres premiers.
Le nombre 1 n'est pas premiers car il admet un seul diviseur.
Le nombres 9 , 15 par exemple ne sont pas premiers car, ils possèdent plus que deux diviseurs dans **IN** .

On admet que l'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini.

2) Décomposition en produit de facteurs premiers :

مثلا ، : Tout nombre entier naturel peut être décomposé en un produit de facteurs premiers, exemples :

$\mathbf{140 = 2^2 \times 5 \times 7 \quad ; \quad 12 = 2^2 \times 3}$

Propriété générale:

Tout entier supérieur ou égal à $\mathbf{2}$ admet aumoins un diviseur premier.

On en déduit que tout entier supérieur ou égal à $\mathbf{2}$ se décompose en un produit de facteurs premiers.

3) Calcul du PGDC et du PPMC en utilisant les décompositions:

Exemples:

Cherchons le pgdc et le ppmc des nombres $\mathbf{1764}$ et $\mathbf{120}$, par décompostion en facteurs premiers

On a : $\mathbf{120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1}$ **et** $\mathbf{1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2}$

Les nombres premiers commun dans les deux décompositions sont $\mathbf{3}$ **et** $\mathbf{2}$:

Le pgdc des nombres $\mathbf{1764}$ et est le produit des facteurs premiers communs élevée à la puissance la plus $\mathbf{120}$ petite.

D'où : $\mathbf{120 \wedge 1764 = 2^2 \times 3^1 = 12}$

Le ppmc des nombres $\mathbf{1764}$ et est le produit de tous les facteurs premiers contenus dans les deux $\mathbf{120}$ décompositions élevée à la puissance la plus grande.

D'où : $\mathbf{120 \vee 1764 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = 17640}$

propriétébgénérales:

- Le pgdc de deux nombres entiers est le produit des facteurs premiers communs contenus dans les décompositions de ces deux nombres, élevés à la puissance la plus petite.
- Le ppmc de deux nombres entiers est le produit de tous les facteurs premiers contenus dans les décompositions de ces deux nombres, élevés à la puissance la plus grande.

4) Propriété liant PGDC et PPMC:

Exemples:

Reprenons l'exemple précédent, posons $\mathbf{a = 1764}$, $\mathbf{b = 120}$, $\mathbf{d = a \wedge b}$ et $\mathbf{m = a \vee b}$

On a : $\mathbf{120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1}$ **et** $\mathbf{1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2}$

D'où : $\mathbf{d = a \wedge b = 2^2 \times 3^1 = 12}$ et $\mathbf{m = a \vee b = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = 17640}$

Remarquons alors que :

$$\mathbf{a \times b = 120 \times 1764 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = (2^2 \times 3^1) \times (2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2) = d \times m}$$

propriétébgénérales:

Quels que soient les entiers naturels non nuls a et b, on a : $\mathbf{(a \wedge b) \times (a \vee b) = a \times b}$

Bonne Chance