I. Unités de mesure des anles –Degré – Radian:

1) Relation entre degré et Radian :

Le degré est l'unité de mesure des angles la plus utilisée dans les classes précédentes , et on sait que la mesure de l'angle plat est 180^0 .
Il existe une autre unité de mesure des angles nomée le « radian » . la mesure de l'angle plat par cette unité est égale à π .
En utilisant la proportionnalité , si a est la mesure d'un angle en degré et x est la mesure du même angle en radian, alors : $\frac{x}{\pi}=\frac{a}{180}$

2) Application :

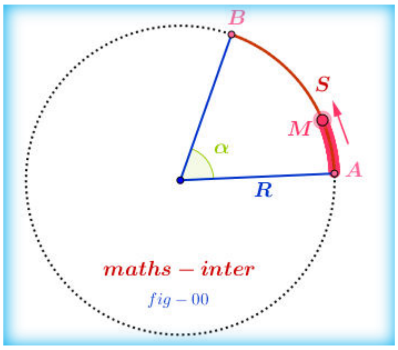
a) Compléter le tableau suivant :

mesure de l'angle en degré	0	15	25	30	45	60
mesure de l'angle en radian	0					

a) Compléter le tableau suivant :

mesure de l'angle en radian	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
mesure de l'angle en degré	$\frac{x}{\pi}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$	

1) Radian et longueur d'un Arc Circulaire :



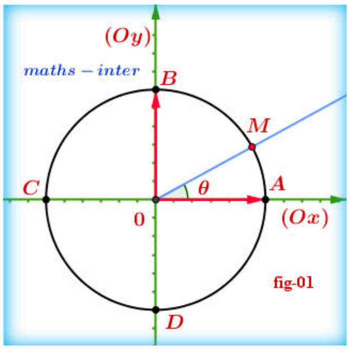
Soit (Γ) un cercle de rayon R . A et B deux points de (Γ) .
Soit M un point mobile sur (Γ) débutant son mouvement de A dans le sens contraire des Eguilles d'une montre.
Si le point M bouge de A vers A en effectuant un tour complet, alors son angle de rotation est 2π et la distance qu'il a parcouru est $P=2\pi R$.
D'où si le point M bouge de A vers B , alors son angle de rotation est α (Radian) et la distance qu'il a parcouru est $S=R\times\alpha$ (proportionnalité) .

II. Cercle trigonométrique –Abscisse curviligne général – Abscisse curviligne principal:

Le plan est muni d'unrepère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$

1) Le cercle trigonométrique :

Le cercle trigonométrique (C) est le cercle de centre O origine du repère et de rayon $R=1$.



2) Abscisse curviligne d'un point sur le cercle :

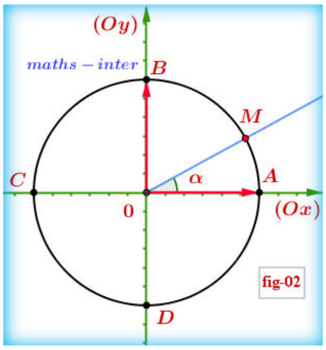
Soient les points $D(0,-1)$; $B(0,1)$; $C(-1,0)$; $A(1,0)$ du cercle trigonométrique (C) .

Tout point M du cercle (C) détermine un angle géométrique et un seul $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OM})$.

Toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OM})$ est appelée abscisse curviligne du point M.
Le point M admet une infinité d'abscisses curvilignes, mais une et une seule abscisse curviligne α est comprise entre $-\pi$ et π on l'appelle « abscisse curviligne principale »
L' abscisse curviligne principale α du pint M vérifie donc : $-\pi \leq \alpha < \pi$.
Pour toute abscisse curviligne θ du point M il existe un entier relatif k tel que : $\theta = \alpha + 2k\pi$.
Si θ et θ' sont deux abscisses curvilignes de M , alors il existe deux entiers relatifs k et k' tel que: $\theta = \alpha + 2k\pi$ et $\theta' = \alpha + 2k'\pi$, d'où : $\theta - \theta' = 2(k - k')\pi = 2k''\pi$

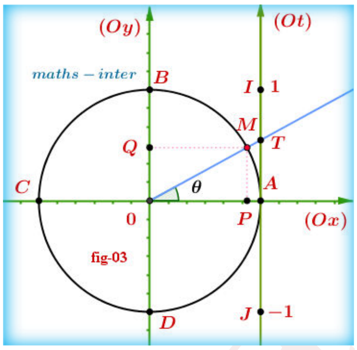
on dit que θ et θ' sont congrus modulo 2π.
On écrit $\theta \equiv \theta'[\text{modulo}2\pi]$ ou $\theta \equiv \theta'[\text{mod}\,2\pi]$ ou tout simplement $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
On lit θ est congrus à θ' modulo 2π.

3) Exemples :



- L'abscisse curviligne principale du point A est 0 , d'où toute abscisse curviligne de A s'écrit ous la forme $2k\pi$ avec k un entier relatif . $2\pi, 2\pi, -2\pi, -4\pi$ sont des abscisses curvilignes de A.
- L'abscisse curviligne principale du point C est π , d'où toute abscisse curviligne de C s'écrit sous la forme $\pi + 2k\pi$ avec k un entier relatif . $3\pi, 5\pi, -\pi, -3\pi$ sont des abscisses curvilignes de C.
- L'abscisse curviligne principale du point B est $\frac{\pi}{2}$, d'où toute abscisse curviligne de B s'écrit ous la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec k un entier relatif . $\frac{5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}$ sont des abscisses curvilignes de B.
- L'abscisse curviligne principale du point D est $-\frac{\pi}{2}$, d'où toute abscisse curviligne de D s'écrit sous la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec k un entier relatif . $\frac{3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}$ sont des abscisses curvilignes de D.
- L'abscisse curviligne principale du point E est $\frac{3\pi}{4}$, d'où toute abscisse curviligne de E s'écrit sous la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec k un entier relatif . $\frac{11\pi}{4}, \frac{-5\pi}{4}$ sont des abscisses curvilignes de E.

III. Rapports trigonométriques:



Soit M un point du cercle trigonométrique et θ l'une de ses abscisses curvilignes . soient :
P la projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses
Q sa projection orthogonale sur l'axe des ordonnées .
T le point d'intersecion de la demi-droite (OM) avec la droite (OI) tangente au cercle en A (voir figue)

1) Calcul des rapports trigonométriques :

a) Calcul de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$:

Dans le triangle OMP rectangle en P, on a:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OP}}{OM} = \frac{\overline{OP}}{1} = \overline{OP} = x_M \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\overline{MP}}{OM} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} = y_M$$

On en déduit que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont successivement, l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. C'est pour cette raison que l'axe des abscisses est encore appelé axe des cosinus et que l'axe des ordonnées est appelé axe des sinus.

b) Calcul $\tan\theta$:

Dans le triangle OTA rectangle en A On a : $\tan\theta = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT} = x_T$

On en déduit que $\tan\theta$ est l'abscisse du point T sur l'axe (AI) , c'est pour cette raison que cet axe est appelé axe des tangentes.

2) Signes des rapports trigonométriques :

Du cercle trigonométrique, on en déduit les signes de $\cos x$, $\cos x$ et de $\tan x$, d'où:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sinx	-1	négatif	0	négatif	1	positif	0	positif	-1
cosx	0	négatif	-1	positif	0	positif	1	négatif	0
tanx	0	positif	$\|\|$	négatif	0	positif	$\|\|$	négatif	0

IV. Formules trigonométriques:

1) Rappel des formules de base :

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

Démonstration :

- **On a sur la figure 3, OMP est un triangle rectangle en P, d'où d'après le théorème de Pythagore : $OP^2 + PM^2 = OM^2$**

D'où $: \frac{OP^2}{OM^2} + \frac{PM^2}{OM^2} = 1$ **donc** $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = 1$ **, ce qui fait :** $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

- **On a sur la figure 3, OMP est un triangle rectangle en P d'où :** $\tan\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{PM}{OM}}{\frac{OP}{OM}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Ce qui fait : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

- On a : $1+\tan^2\theta = 1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

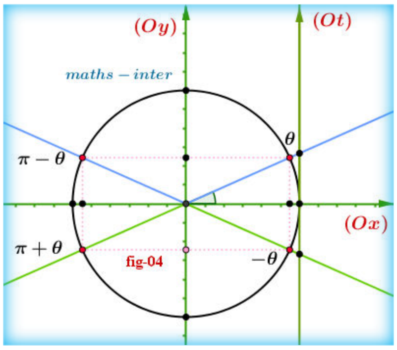
D'où : $\boxed{1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2) Formules de transformation :

Les formules de transformation suivantes se déduisent directement du cercle trigonométrique:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\pi+\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta)=-\tan\theta\end{array}}$$

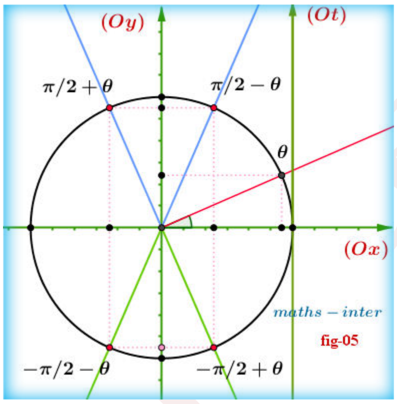


$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta\\ \tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\pi/2+\theta)=\cos\theta\\ \cos(\pi/2+\theta)=-\sin\theta\\ \tan(\pi/2+\theta)=-1/\tan\theta\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(-\pi/2+\theta)=-\cos\theta\\ \cos(-\pi/2+\theta)=\sin\theta\\ \tan(-\pi/2+\theta)=-1/\tan\theta\end{array}}$$



$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta\\ \cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta\\ \tan(\pi/2-\theta)=1/\tan\theta\end{array}}$$

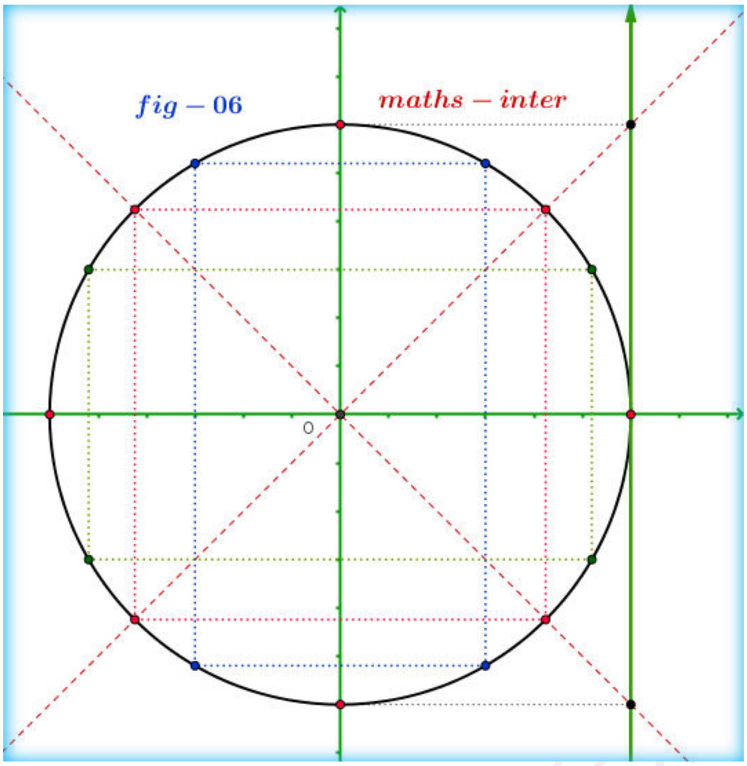
$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(-\pi/2-\theta)=-\cos\theta\\ \cos(-\pi/2-\theta)=-\sin\theta\\ \tan(-\pi/2-\theta)=1/\tan\theta\end{array}}$$

3) Angles remarquables :

Compléter le tableau suivants :

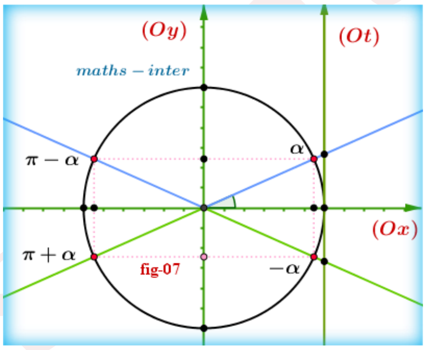
$\alpha°$	-180				-90				0				90				180
α^{rd}	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
$\tan\alpha$																	

Compléter le cercle suivants :



V. Equations et Inéquations Trigonométriques:

1) Equations de bases :



α est un nombre réel donné (connu) et x est la valeur inconnue.
Les solutions des équations de base sont inspirées du cercle trigonométrique

$\cos x = \cos \alpha$	$\sin x = \sin \alpha$	$\tan x = \tan \alpha$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$	$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$	$x = \alpha + k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$	$k \in \mathbb{Z}$	$k \in \mathbb{Z}$

2) Exemples de Résolutions des Inéquations Trigonométriques :

Voir séries des exercices

Bonne Chance